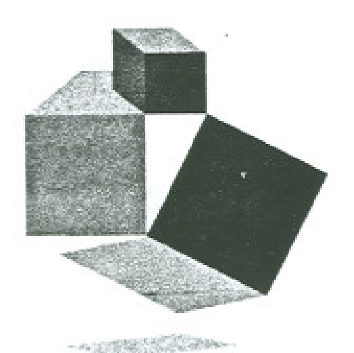
CIDEM



Maestría en Matemática Educativa

MATERIAL PARA EL CURSO CÁLCULO DIFERENCIAL

ASESOR: Leonardo Sáenz Baez

CONTENIDO

APUNTES DE CALCULO DIFERENCIAL

CAPITULO 1.
LOS NUMEROS REALES

1.1 Racionales e Irracionales.

Los números racionales, son aquellos que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros. Este tipo de números de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b enteros y $b \neq 0$, se pueden graficar como puntos de una recta. Dividiendo la unidad en b partes y tomando a veces el segmento $\frac{1}{b}$, a partir del origen, se llega a un punto "racional" $\frac{a}{b}$ de la recta; situado a la derecha del origen si el número es positivo y a la izquierda si es negativo.

El conjunto de números racionales es infinito y denso en la recta, en el sentido de que, para dos puntos racionales distintos en la recta, existen una infinidad de racionales entre ellos. No obstante esto, existen puntos que no son racionales, esto es, puntos o números que no se pueden escribir como un cociente de enteros. A este tipo de números se les llama irracionales.

Los números Reales es la unión de los racionales con los irracionales.

Los reales se pueden graficar como puntos de una recta, de manera tal que a cada número real le corresponde un solo punto de la recta y, reciprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un solo número real, se establece con ello una correspondencia biunivoca entre puntos de la recta y números reales. A esta representación gráfica se le llama recta numérica.

Ejemplos de números racionales.

a) Cualquier número entero a es racional ya que este se puede escribir como el cociente de enteros $\frac{a}{1}$.

b) Cualquier número en forma decimal $\beta.a_1a_2\ldots a_n$, con un número finito de decimales, es un racional, ya que se puede escribir como el cociente de enteros

$$\frac{\beta a_1a_2\ldots a_n}{10^n}$$

c) Los números decimales infinitos periódicos $\gamma.\overline{a_1a_2\ldots a_n}$, en los cuales se repite el bloque de digitos $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$, son números racionales, pues se pueden escribir como:

$$
\begin{aligned}
N &= \gamma.\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \\
10^n N &= \gamma a_1 a_2 \ldots a_n.\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \\
&= (\gamma 10^n + a_1 10^{n-1} \cdots + a_{n-1} 10 + a_n 10^0).\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \\
10^n N - N &= (\gamma 10^n + a_1 10^{n-1} \cdots + a_{n-1} 10 + a_n 10^0).\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} - \gamma.\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \\
&= (\gamma 10^n + a_1 10^{n-1} \cdots + a_{n-1} 10 + a_n 10^0) - \gamma \\
N &= \frac{(\alpha 10^n + a_1 10^{n-1} \cdots + a_{n-1} 10 + a_n 10^0) - \gamma}{10^n - 1} = \frac{\beta - \gamma}{\underbrace{99 \cdots 9}_{\text{con n-nueves}}}
\end{aligned}
$$

siendo así N, un cociente de enteros

d) Los números decimales infinitos no periódicos , son irracionales.
Por ejemplo $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$, su desarrollo decimal es infinito y no periódico. Estos números no se pueden expresar como el cociente de dos enteros.

Para hacer ver que $\sqrt{2}$ es irracional , recurrimos a una prueba indirecta, llamada "reducción al absurdo", la cual consiste en suponer lo contrario de lo que se desea demostrar y, empleando razonamientos deductivos, llegar a una contradicción lo cual nos indicará que nuestra suposición no puede ser verdadera siendo correcta la inicial.

Supongamos, pues, que $\sqrt{2}$ es racional, lo cual significa que se puede escribir como el cociente de dos enteros, fracción que puede ser reducida a su mínima expresión

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

lo cual significa que los enteros a y b ***no*** tienen factores en común.

Elevando la expresión al cuadrado se tiene

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

ó $\quad a^2 = 2b^2$

lo que nos indica que a^2 es par

lo cual implica que a también es par

o sea que a es de la forma

$a = 2k$ con k entero, y por lo tanto

$$a^2 = 4k^2 = 2b^2$$

de donde vemos que

$b^2 = 2k^2$ y que por lo tanto

b es un número par

Suponer pues que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a y b sin factores en común nos conduce a una contradicción inmediata al mostrarnos que ambos tiene como factor al 2, ya que ambos son pares.

Otra manera de probarlo consiste en emplear el Teorema Fundamental de la Aritmética que nos dice que todo entero positivo se puede factorizar de manera única, salvo el orden de factores, como un producto de números primos, o sea que, a cada entero le corresponde un determinado conjunto de factores primos. Dos enteros diferentes no pueden tener el mismo conjunto de factores primos.

Con esto en mente, al suponer que $\sqrt{2}$ es racional o sea que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, se tiene

$$2b^2 = a^2$$

y al descomponer a y b en primos, como estan elevados al cuadrado sus factores se duplican, siendo pares el número sus de factores, de modo que el 2, factor en la derecha, hace mal tercio y es imposible que se trate del mismo entero esto es : $2b^2 = a^2$ es falso, lo que implica que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ es falso de modo que $\sqrt{2}$ no se puede escribir como el cociente de dos enteros siendo por lo tanto un número irracional

1.2 Axiomas de Campo.

En el conjunto de números reales se definen dos operaciones básicas, llamadas suma y producto, con lo que se forma una estructura de Campo con las siguientes propiedades, llamadas ***Axiomas de Campo***

Aqui las letras a, b y c representan números reales cualesquiera.

1. *AXIOMA DE ASOCIATIVIDAD.*

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a(bc) = (ab)c$$

2. *AXIOMA DE CONMUTATIVIDAD*

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

3. *AXIOMA DE EXISTENCIA DE NEUTROS*

Existe un real 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo real a

Existe un real 1 tal que $a1 = 1a = a$ para todo real a

0 es llamado ***cero***, o neutro para la suma y 1 es llamado ***uno***, o neutro para el producto

4. *AXIOMA DE EXISTENCIA DE INVERSOS*

Para cada real a, existe $-a$ tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$

Para cada real $a \neq 0$, existe $\frac{1}{a}$, tal que $a\frac{1}{a}=a=1$

$-a$ es llamado inverso aditivo de a y $\frac{1}{a}$ es llamado inverso multiplicativo de a

5. AXIOMA DE DISTRIBUTIVIDAD

El producto se distribuye sobre la suma

$$a(b+c)=ab+ac=ba+ca=(b+c)a$$

Definicion de las operaciones de resta y cociente.

Las otras operaciones básicas entre números reales, de resta y cociente, se definen en términos de la suma y el producto en la forma siguiente:

***Definición* 1.**

La resta entre los números a y b se define como: $a-b \equiv a+(-b)$

El cociente entre los números a y b se define como $\frac{a}{b} \equiv a\frac{1}{b}$

Los Axiomas de Campo, costituyen el fundamento algebraíco de los números reales, con ellos se pueden justificar todas sus propiedades algebraícas.

Entre los principales Teoremas que expresan propiedades algebraícas podemos mencionar los siguientes:

***Teorema* 1.1. *Los elementos neutros son únicos*.**

***Teorema* 1.2. *Ley de Cancelación*.**

Si $a+c=b+c$, entonces $a=b$.

Si $ac=bc$, y $c \neq 0$, entonces $a=b$

***Teorema* 1.3.** $a0=0$, para cualquiera que sea el número real a.

***Teorema* 1.4.** $-(-a)=a$ y $\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$

***Teotrema* 1.5.** $-(a+b)=-a+(-b)=-a-b$ y $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\frac{1}{b}$

***Teorema* 1.6.** $-(a-b)=b-a$ y $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$

***Teorema* 1.7.** $a(-b)=(-a)b=-ab$ y $(-a)(-b)=ab$

***Teorema* 1.8.** $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$ y $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$

***Teorema* 1.9.** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ y $\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bc}$

***Teorema* 1.10.** $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ y $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$

***Definición* 2.**

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1); \quad 0! = 1$

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Productos notables.

A continuación mencionaremos algunos resultados del álgebra con números reales, conocidos como productos notables los cuales son aplicados constantemente.

***Teorema* 1.11.**

i) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$, donde $\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ii) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

iii) $a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})$, para n entero par.

iv) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, para n impar y positivo.

Algunos ejemplos particulares son:

$a^6 - b^6 = (a+b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$

$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+y)^5 = a^5 + 5a^4y + 10a^3y^2 + 10a^2y^3 + 5ay^4 + y^5$

1.3 *Axiomas de Orden*.

En el Campo de los reales, existe un orden lineal, un orden en la recta, que nos permite decir cuando un determinado número es menor que otro. Desde un punto de vista intuitivo, decimos que el real a es "menor que " el real b, si en la recta numérica, a se encuentra a la izquierda del número b, en símbolos lo expresamos escribiendo $a < b$.

Desde un punto de vista axiomático esta relación de orden la describimos en base a un concepto primitivo de positividad, suponiendo la existencia de un conjunto P de elementos positivos en los reales, (en la recta numérica P, son todos los puntos a la derecha del origen).

Los Axiomas de Orden en los reales son:

O_1 : La suma y el producto de dos elentos de P, son elementos de P.

En símbolos : Si $a, b \in P$, entonces $(a+b) \in P$ y $ab \in P$.

O_2 : Dado cualquier real x, una y solamente una de las tres siguientes proposiciones es verdadera

i) $x \in P$ *ii)* $x = 0$ *iii)* $-x \in P$

La relación "menor que" se define como:

***Definición* 3.** $a < b$ si y sólo si $(b-a) \in P$.

En base a esta definición podemos ahora definir los siguientes símbolos, en donde se ha puesto la notación de doble implicación $\Leftrightarrow$ para la frase " si y sólo si", a veces abreviado como "sii"

***Definición* 4.**

$i)\ a \leq b \Leftrightarrow a < b$ ó $a = b$.
$ii)\ a > b \Leftrightarrow b < a$.
$iii)\ a \geq b \Leftrightarrow a > b$ ó $a = b$.

Números negativos.

***Definición* 5**. Un número real a es llamado negativo si y sólo si $-a \in P$.
esto es, a es negativo sii su inverso aditivo $-a$ es positivo.

Se puede hacer ver que $a < 0$ expresa que a es negativo y que $a > 0$ indica que a es positivo.

Algunos Teoremas básicos que involucran la relación de orden, y que posteriormente los emplearemos para resolver desigualdades, son los siguientes:

***Teorema* 1.12**. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para cualquier real c.
***Teorema* 1.13**. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
***Teorema* 1.14**. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
***Teorema* 1.15**. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
***Teorema* 1.16**. Dados dos números reales a y b cualesquiera, una y solamente una de las tres siguientes proposiciones es verdadera:

$i)\ a < b$ $\quad ii)\ a = b$ $\quad$ ó $\quad iii)\ a > b$.

Teorema* 1.17**. ***Regla de los signos.

Si $a > 0, b > 0$, entonces $ab > 0$
Si $a < 0, b < 0$, entonces $ab > 0$
Si $a < 0, b > 0$, entonces $ab < 0$
Si $a > 0, b < 0$, entonces $ab < 0$

***Teorema* 1.18**. $x^2 \geq 0$, para todo número real x.

Intervalos en la recta.

Los siguientes conjuntos de números reales o puntos de la recta numérica, llamados intervalos, son útiles y se les maneja en una notación compacta.

***Definición* 6.**

CONJUNTO	NOTACIÓN COMPACTA	NOMBRE DEL INTERVALO	NOTACIÓN GRAFICA
$\{x : a < x < b\}$	(a,b)	abierto	(———————)
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a,b]$	cerrado	[———————]
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a,b]$	abierto - cerrado	(———————]
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a,b)$	cerrado - abierto	[———————)
$\{x : a \leq x < \infty\}$	$[a,\infty)$	cerrado - infinito	[———————►
$\{x : a < x < \infty\}$	(a,∞)	abierto - infinito	(———————►
$\{x : -\infty < x < b\}$	$(-\infty,b)$	infinito-abierto	◄———————)
$\{x : -\infty < x \leq b\}$	$(-\infty,b]$	infinito-cerrado	◄———————]
$\{x : -\infty < x < \infty\}$	$(-\infty,\infty)$	La recta real	◄———————►

Valor absoluto de un número real.

***Definición* 7.**

El valor absoluto de un número real x se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Las siguiéntes son algunas propiedades del valor absoluto.

***Teorema* 1.19.** i) $|a| \geq 0$, ii) $|-a| = |a|$, iii) $|a| \geq a$

iv) $|ab| = |a|\,|b|$, v) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$.

vi) $|a|^2 = a^2$ ó $|a| = \sqrt{a^2}$.

vii) $|a| < \delta$ si y sólo si $-\delta < a < \delta$.

***Teorema* 1.20.** i) $|a+b| \leq |a| + |b|$ ii) $|a-b| \leq |a| + |b|$

iii) $|a-b| \geq |a| - |b|$ iv) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

.***Definición* 8.** Vecindades. Para un número real a cualquiera y un real $\delta > 0$;

El conjunto de números reales definido por $V_\delta(a) = \{x : a-\delta < x < a+\delta\}$, o en forma equivalente $V_\delta(a) = \{x : -\delta < x-a < \delta\} = \{x : |x-a| < \delta\}$, es llamado un conjunto de puntos vecinos o una vecindad de centro a y radio δ.

Esta vecindad es un conjunto abierto de números x comprendidos entre $a-\delta$ y $a+\delta$, donde el propio centro a es un punto de la vecindad. Para considerar una vecindad sin centro hay que indicar que $0 < |x-a| < \delta$ ó bien, decir que se trata del intervalo $a-\delta < x < a+\delta$, con $x \neq a$.

Por ejemplo la notación $|x-2|<1$, nos indica la vecindad con centro en 2 y radio 1 ó bien el intervalo abierto $-1<x-2<1$ ó $1<x<3$

La notación $0<|x-2|<1$, nos indica la misma vecindad pero sin el centro ó sea , el intervalo

$1<x<3$, con $x \neq 2$.

Como resolver desigualdades.

Veamos un ejemplo de como resolver una desigualdad empleando estos teoremas.

Ejemplo1. Resolver la desigualdad $\frac{3x-2}{5}<\frac{4-2x}{3}$

Solución.

Para quitar denominadores, multipliquemos por el número positivo 15 ambos lados de la desigualdad, con lo que se obtiene:

$$3(3x-2)<5(4-2x)$$

y efectuando operaciones

$$9x-6<20-10x$$

sumando en ambos lados $10x+6$ se tiene

$$19x<26$$

multiplicando, ambos lados por $\frac{1}{19}$ obtenemos

$$x<\frac{26}{19}$$

lo cual nos indica que la desigualdad se cumple para toda x menor que el número racional $\frac{26}{19}$,

que en la recta numérica son todos los puntos situados a la izquierda de dicho número, o sea, el intervalo infinito $\left(-\infty, \frac{26}{19}\right)$.

Ejemplo 2. Resolver la desigualdad de segundo grado $x^2+2x-15 \geq 0$.

Solución. En este caso resulta fácil factorizar la expresión cuadrática y se obtiene

$$(x-3)(x+5) \geq 0$$

como el producto es positivo ó igual a cero, se tiene

$$(x-3) \geq 0, \quad (x+5) \geq 0$$

lo cual implica que

$$x \geq 3, \quad x \geq -5 \quad \Rightarrow \quad x \geq 3$$

o bien

$$(x-3) \leq 0, \quad (x+5) \leq 0$$

lo que implica que

$$x \leq 3, \quad x \leq -5 \quad \Rightarrow \quad x \leq -5$$

por lo tanto la desigualdad se verifica si

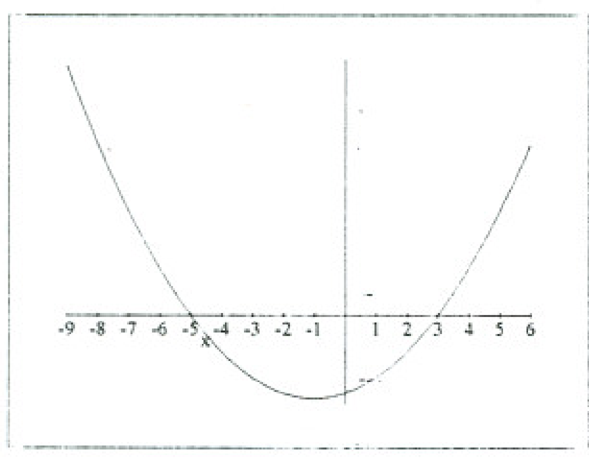
$$x \leq -5 \text{ ó } x \geq 3$$

o, en notación de conjuntos,el conjunto solución S será:

$$S = (-\infty, -5] \cup [3, \infty)$$

Un método para resolver este tipo de desigualdades consiste en graficar la parábola

$$y = x^2 + 2x - 15$$



Gráfica de $y = x^2 + 2x - 15$

la cual se abre hacia arriba, y corta al eje-x en los puntos -5 y 3, resultando inmediato que las ordenadas $y = x^2 + 2x - 15$ son mayores o iguales a cero para cuando $x \leq -5,\ x \geq 3$

esto es, la desigualdad $x^2 + 2x - 15 \geq 0$, tiene como conjunto de soluciones a $S = (-\infty, -5] \cup [3, \infty)$.

Ejemplo 3. Demostrar que si $a \geq 0, b \geq 0$, entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Demostración. Para el número real $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$ se tiene

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Los números $\frac{a+b}{2}$ y $\sqrt{ab}$, son llamados, respectivamente, media aritmética y media geométrica de los numeros a y b.

Ejemplo 4. Encuentre el conjunto solución de la desigualdad $|x^2 - 4x + 3| \leq |2x^2 - x + 5|$

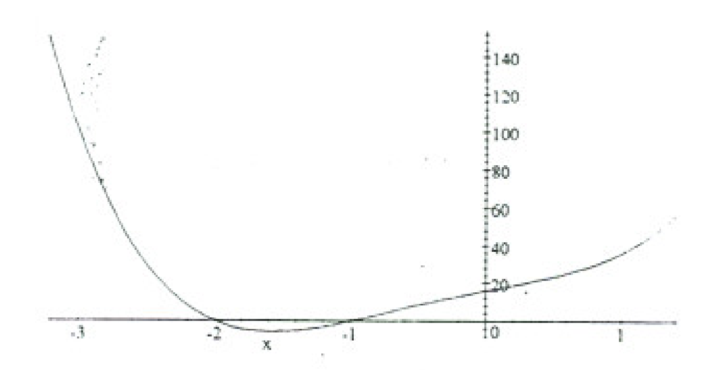
Solución. Elevando al cuadrado ambos lados se tiene:

$$(x^2-4x+3)^2 \le (2x^2-x+5)^2$$
$$(x^2-4x+3)^2-(2x^2-x+5)^2 \le 0$$
$$(3x^2-5x+8)(-x^2-3x-2) \le 0$$
$$(3x^2-5x+8)(x^2+3x+2) \ge 0$$
$$(3x^2-5x+8)(x+2)(x+1) \ge 0$$

Si analizamos la función $y=(3x^2-5x+8)(x+2)(x+1)$, vemos que cruza al eje-x únicamente en los puntos de abscisas -2 y -1 y un análisis de signos nos indica que: (tenga en cuenta que $(3x^2-5x+8)$ es positiva para toda x).



la curva tiene ordenadas positivas ó iguales a cero para cuando $x \in (-\infty,-2] \cup [-1,\infty)$, siendo este el conjunto solución de la desigualdad.



Gráfica de $y=(3x^2-5x+8)(x+2)(x+1)$

Conjuntos acotados.

***Definición* 9.**

Un conjunto A de números reales se dice que se encuentra *acotado* por arriba si existe un número real M tal que $x \le M$ para toda $x \in A$. El número M es llamado una cota superior del conjunto A. El conjunto A se dice que tiene una *mínima cota superior* L, si L es una cota superior de A y si, para cualquier otra cota superior M de A, $L \le M$.

El campo de los números reales con la relación de orden, constituye un campo ordenado. Pero además es completo, en el sentido de que cumple con la propiedad de Plenitud indicada en el siguiente axioma:

1.4 Axioma de Plenitud.

Si A es un conjunto no vacio de números reales acotado por arriba, entonces A tiene una *mínima cota superior*.

Ejercicios. Grupo 1.

1. Demuestre que si a, b, c, d son números reales, con $b, d \neq 0$, entonces:

i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

ii) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$.

iii) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

2. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados para números reales arbitrarios a, b.

i) $|a| \geq 0$ *ii)* $|ab| = |a||b|$ *iii)* $-|a| \leq a \leq |a|$ *iv)* $|a| \leq b \Leftrightarrow b \geq 0,\ -b \leq a \leq b$.

3. Demuestre que, para cualesquiera que sean los números reales a, b

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

4. Demuestre que si $a \geq 0, b \geq 0$ y $a^2 \leq b^2$, entonces $a \leq b$.

5. Demuestre que si $ab = 0$, entonces por lo menos uno de los dos factores a, o bien b, es igual a cero.

6. Hallar el valor de x en la expresión $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x + 1}} + \sqrt[12]{x} \right]^6$, sabiendo que el cuarto término es 200.

Sol. $x_1 = 10,\ x_2 = 0.0001$

7. Encuentre el valor de la suma $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

8. Demuestre que el conjunto $A = \left\{ x : x = \frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1},\ t > 0 \right\}$ es acotado.

9. Encuentre la vecindad con centro en $x = 2$ y radio máximo para la cual si $x \in V_\delta(2)$ entonces

$\sin x > 0$.

CAPITULO 2.

LAS FUNCIONES REALES.

2.1 Definiciones y ejemplos.

En el Cálculo se manejan los conceptos de límites, derivadas e Integrales que se aplican a Funciones, siendo por lo tanto este concepto uno de los fundamentales en esta materia.

En este capítulo daremos una definición de función y haremos una clasificación de las funciones reales describiendo como se grafican.

En muchas aplicaciones de la matemática al describir un fenómeno que relaciona varias cantidades, normalmente se describe la relación entre ellas mediante una función que indica la variación de una cantidad respecto de otra u otras, la primera es llamada variable dependiente y la otra u otras, variable(s) independiente(s). Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. La cantidad N de bacterias en un cultivo depende del tiempo transcurrido, t. Si el cultivo se inicia con 5000 bacterias y la población de éstas se duplica cada hora, entonces, una vez transcurridas t horas, la cantidad de bacterias será $N = (5000)2^t$. Esta expresión es una regla que nos relaciona t con N, donde para cada valor dado de t, corresponde un determinado valor de N; decimos que N es una función de t, y para resaltar esta dependencia escribimos $N = N(t) = (5000)2^t$. Aqui N es la variable dependiente y t es la variable independiente.

Ejemplo 2. Supongamos que en un instante inicial $t = 0$, una partícula se encontraba en reposo, y luego (cuando $t > 0$) bajo la acción de la fuerza de gravedad comenzó a caer. Entonces el camino recorrido s por dicha partícula en el tiempo t se expresará mediante la fórmula $s = \frac{1}{2}gt^2, \quad (t \geq 0)$

donde g es la aceleración de la gravedad. En este caso las magnitudes relacionadas son s y t. A cada valor del tiempo t, en virtud de la ley expresada por la fórmula, corresponde un valor determinado de s, cuando varia t (variable independiente), cambia el valor de s, (variable dependiente).

Ejemplo 3. El área A de un circulo, depende de su radio r . La regla que relaciona r con A está expresada por la ecuación $A(r) = \pi r^2$. Aquí para cada número positivo r, (variable independiente), hay un valor asociado de A, variable dependiente.

Ejemplo 4. La ley de Boyle-Mariotte se expresa por la fórmula $v = \frac{c}{p}, \quad (p > 0)$ donde c es una constante; p, la presión de la cantidad dada de un gas; v, el volumen del gas que correspode a dicha presión. Aquí v está en función de p.

Podemos decir que una función es una relación entre dos variables; x e y, donde para cada valor asignado a una de ellas, (la variable independiente x), se tiene en correspondencia un solo valor de la otra variable (la y o variable dependiente) . Dicha relación se indica con el símbolo $y = y(x)$, que nos dice que la y es una función de x.

Normalmente las cantidades físicas,que se manejan en las aplicaciones, están dadas por números reales y la dependencia funcional que describe al fenómeno es una relación entre conjuntos de números reales, donde a cada número real de un conjunto se asocia un solo número real del otro conjunto.

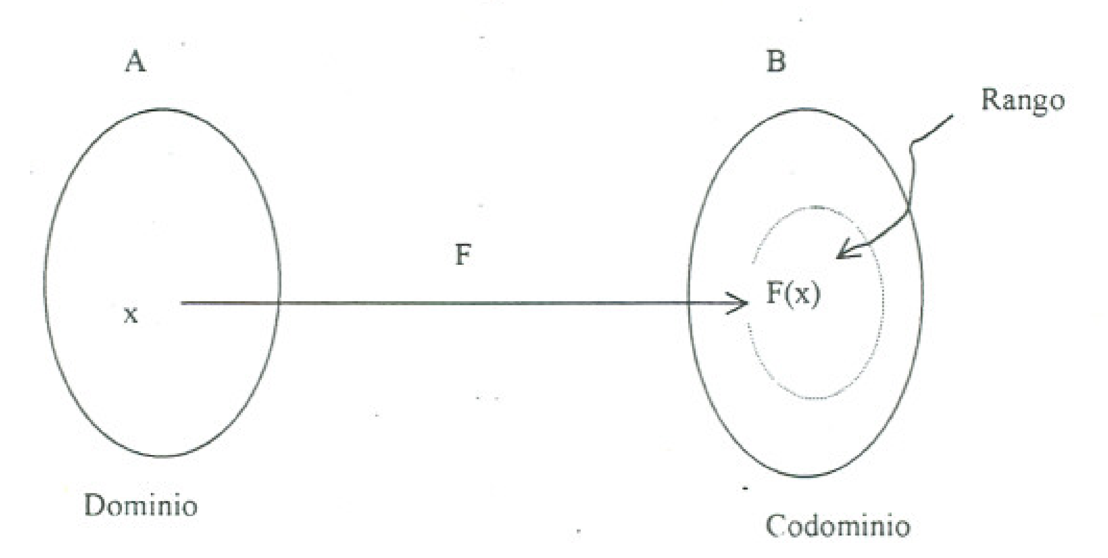
Definición de función real.

***Definición* 10.**

Una función real F, entre dos conjuntos A y B de números reales, es una manera de asociar a cada elemento $x \in A$, un solo elemento $y = F(x) \in B$. A la variable x se le llama argumento de la función F, o variable independiente, y la variable y, se llama variable dependiente ó imágen de x bajo F.

Notación.

Para indicar que la función F se encuentra definida del conjunto A al conjunto B, se escribe $F : A \to B$. Al conjunto A, se le llama Dominio de la función y al conjunto B, Codominio. A la imágen $y = F(x)$, se le llama valor de la función en x ó relación funcional. El conjunto de valores $F(x)$, forman un subconjunto de B, llamado el Rango de la función.



La función como un conjunto de parejas ordenadas.

En una función $F : A \to B$, a cada elemento de $x \in A$ se asigna un solo elemento de $y = F(x) \in B$
obteniendo con ello un conjunto de parejas ordenadas (x,y), tales que $y = F(x)$, los cuales definen a la función. Con lo anterior podemos también definir a una función $F : A \to B$, como el conjunto

$$F = \{(x,y) : x \in A, y \in B, y = F(x)\}$$

Esto es, una función $F : A \to B$, es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, o un conjunto de parejas ordenadas (x,y) con $x \in A, y \in B$, tales que la primera componente nunca se repite (ya que a cada elemento de A le corresponde solamente un elemento de B). El dominio de F, es el conjunto de todas las primeras componentes de los pares que

forman la función y el codominio el conjunto de todas las segundas componentes.

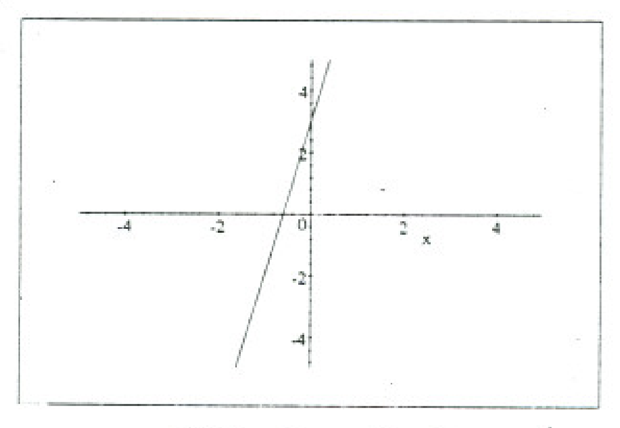
En un diagrama de $A \times B$, la gráfica de la función F será, o estará integrada por, la gráfica de cada uno de los puntos (x,y) que forman la función.

Una función del tipo $F : A \to R$, donde $A \subseteq R$ y R es el conjunto de números reales, es llamada una función real de una variable real, y su gráfica es la gráfica de los puntos (x,y) en el plano Cartesiano $R \times R$, donde x son las abscisas, y y las ordenadas correspondientes.

De manera compacta denotaremos a la función $F = \{(x,y) : y = F(x)\}$, únicamente con su valor funcional $y = F(x)$, que normalmente es una ecuación, y sobreentendiendo que su dominio son todos aquellos números reales x para los cuales $y = F(x)$ es un número real bien definido.

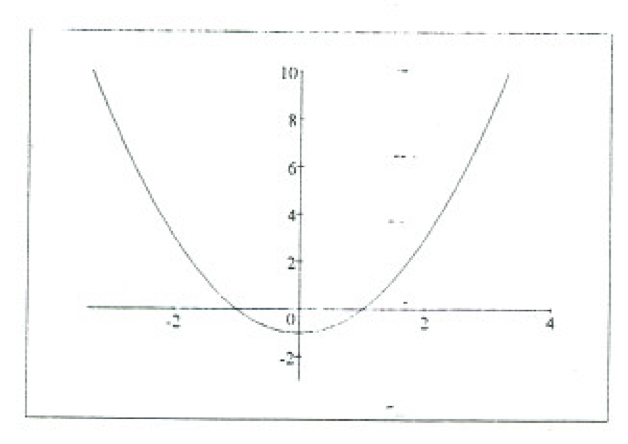
Veamos algunos ejemplos de funciones reales y sus gráficas.

Ejemplo 1. La expresión $y = F(x) = 5x + 3$, nos indica una función real con dominio y rango igual a todos los números reales y cuya gráfica es una linea recta de pendiente 5 y ordenada al origen 3.



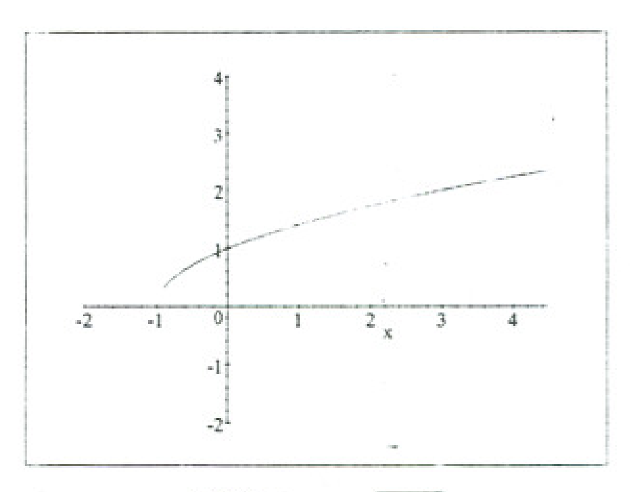
Gráfica de $y = 5x + 3$

Ejemplo 2. La función $y = x^2 - 1$, es una función real cuyo dominio son todos los reales, ya que para cualquier x está bien definida la y; siendo su gráfica una parábola vertical que se abre hacia arriba y que corta al eje-x, en los puntos -1 y 1. Su rango es el conjunto de ordenadas que integran la función y, que en este caso, es el conjunto $Rg(F) = \{y : y \geq -1\}$



Gráfica de $y = x^2 - 1$

Ejemplo 3. La función real $y = \sqrt{x+1}$, tiene como dominio a todos los reales para los cuales $x+1 \geq 0$, esto es, para cuando $x \geq -1$, ya que en caso contrario se tendria que $y = \sqrt{x+1}$ es un número complejo, la gráfica es la mitad superior de la parábola horizontal que se indica en la figura.



Gráfica $y = \sqrt{x+1}$

Para determinar gráficamente el dominio de una función real podemos emplear el criterio de la línea vertical que consiste en trazar una linea vertical por un punto x en el eje-x, si esta línea corta por lo menos a un punto de la gráfica, entonces, y sólo entonces, x pertenecerá al dominio de la función.

Si en la gráfica anterior se traza una línea vertical por -2, esta no cortará a ningún punto de la gráfica y por lo tanto -2 no pertenece al dominio, en cambio si se traza una línea vertical por cualquier punto mayor o igual que -1, esta cortará por lo menos a un punto de la gráfica , siendo por lo tanto su dominio, el intervalo $[-1, \infty)$.

2.2 Clasificación de funciones reales.

Las funciones reales que se manejan en el Cálculo forman un conjunto denominado "Conjunto de Funciones Elementales". Dicho conjunto esta integrado por los siguientes tipos de funciones.

a) ***Funciones polinomiales.***

Una función real de la forma $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, donde n es un entero no negativo, $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$, son números reales, es llamada función polinomial de grado n. Su dominio son todos los números reales. Casos particulares de estas funciones son:

- La función constante $y = k$, donde k es una constante, cuya gráfica es una recta paralela el eje-x, situada a una distancia k del mismo.
- La función identidad $y = x$, cuya gráfica es una recta que corta al primer y tercer cuadrante por la mitad.
- La función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$,ó polinomial de segundo grado, cuya gráfica es una parábola vertical que se abre hacia arriba si $a > 0$, y hacia abajo si $a < 0$.

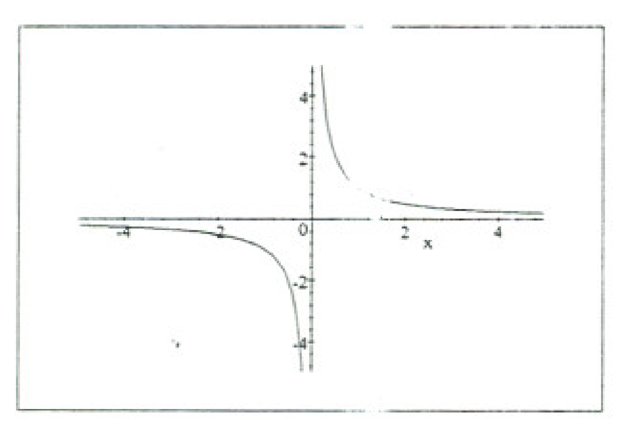
b) Funciones racionales.

Una función de la forma $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$, donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son funciones polinomiales es llamada una función racional. El dominio son todos los números reales x tales que $Q_m(x) \neq 0$; esto es, todos los reales excepto aquellos que hagan cero al polinomio del denominador.

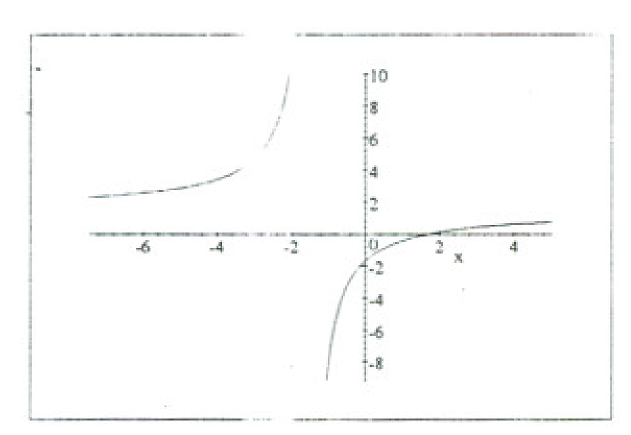
Algunos ejemplos de funciones racionales serían:

- $y = \frac{1}{x}$, definida para toda $x \neq 0$, o sea que, su dominio son todos los reales diferentes de cero.
- $y = \frac{3x-5}{2x+3}$, cuyo dominio son todas las x tales que $x \neq -\frac{3}{2}$.
- $y = \frac{1}{x^2-1}$, cuyo dominio es $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$, o simplemente, todas las $x \neq -1, 1$

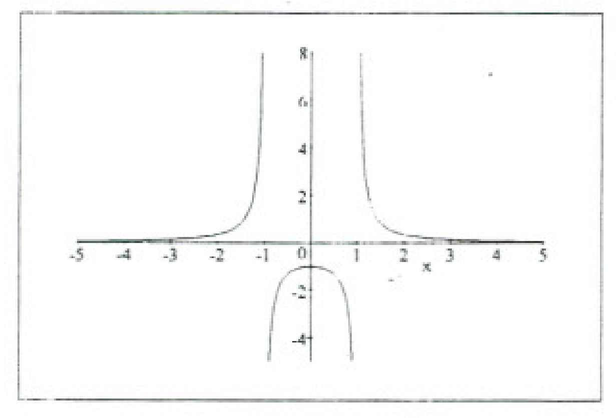
Las gráficas de estas funciones se verian así:



Gráfica de $y = \frac{1}{x}$



Gráfica de $y = \frac{3x-5}{2x+3}$



Gráfica de $y = \frac{1}{x^2-1}$

c) Funciones Algebraicas.

Una función $y = f(x)$ que satisfaga una relación algebraica de la forma

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + P_{n-2}(x)y^{n-2} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0 \qquad \text{(A)}$$

donde $P_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, n;$ son polinomios arbitrarios en la variable x, es llamada una función algebraíca.

Algunos ejemplos de funciones algebraícas son los siguientes:

- $y = \sqrt{x}$, es algebraíca ya que esta función satisface la relación, $y^2 - x = 0$, que es de la forma (A). El dominio son todas las x tales que $x \geq 0$.
- Toda función racional $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, es algebraíca, ya que satisface una relación del tipo $Q_m(x)y - P_n(x) = 0$, que es de la forma (A).

d) ***Funciones trascendentes***.

Una gran variedad de funciones que no son algebraícas son las llamadas trascendentes, entre las cuales podemos mencionar las:

- Funciones trigonométricas y sus inversas:

Función Trigonométrica	Función Trigonométrica inversa
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$y = \arccos x$
$y = \tan x$	$y = \arctan x$
$y = \cot x$	$y = \text{arccot}\, x$
$y = \sec x$	$y = \text{arcsec}\, x$
$y = \csc x$	$y = \text{arccsc}\, x$

- La función logarítmica y su inversa la exponencial.

$y = \log_a x \quad ; \quad y = a^x$; donde a es un número real mayor que cero y diferente de la unidad.

cuando $a = e(\approx 2.718281828)$, base de logaritmos naturales, se tiene

$y = \ln x \quad ; \quad y = e^x$

y cuando $a = 10$, base de logaritmos vulgares, se tiene

$y = \log x \quad ; \quad y = 10^x$

- Las funciones hiperbólicas y sus inversas.

  En términos de exponenciales se pueden definir las funciones

Función hiperbólica	Función hiperbólica inversa
$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;	$y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; $-\infty < x < \infty$
$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;	$y = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$; $x > 1$
$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;	$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; $-1 < x < 1$
$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$y = \coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; $x > 1$ ó $x < -1$
$y = \operatorname{sec}hx = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	$y = \operatorname{sec}h^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$; $0 < x \leq 1$
$y = \operatorname{csc}hx = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	$y = \operatorname{csc}h^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)$; $x \neq 0$

2.3 Operaciones con funciones.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos funciones y α es un número real, se definen las operaciones:

***Definición* 11.**

Suma: $(F+G)(x) = F(x) + G(x)$
Resta: $(F-G)(x) = F(x) - G(x)$
Producto: $(FG)(x) = F(x)G(x)$
Cociente: $\left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$, con $G(x) \neq 0$
Escalar por función: $(\alpha F)(x) = \alpha F(x)$.
Composición de funciones: $(G \circ F)(x) = G(F(x))$

Definición* 12. *Funciones pares , impares y periódicas.

- Una función $f(x)$ es llamada par si $f(-x) = f(x)$. (Simetría con el eje-y)
- Una función $f(x)$ es llamada impar si $f(-x) = -f(x)$. (Simetría con respecto al origen).
- Una función $f(x)$ es llamada periódica de período p, si $f(x+p) = f(x)$

Ejemplos y ejercicios.

1. La función $y = \sin x$ es impar ya que $\sin(-x) = \sin x$, en cambio $y = \cos x$ es par. puesto que $\cos(-x) = \cos x$.

2. Indique si las siguientes funciones son pares ó impares:
a) $y = \frac{1+\sin x}{\sin x}$, b) $y = \frac{\sin x}{x}$, c) $y = \ln(e^x)$

3. Demuestre que la función $y = \cos^2 x$, es par y periódica, con período π.

En la siguiente tabla se dan ejemplos de algunas funciones, indicando el nombre genérico y su dominio.

FUNCIÓN	NOMBRE	DOMINIO
$y = 5x^3 - 2x^2 + 3$	Función polinomial	$(-\infty, \infty)$
$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	Función racional	toda $x \neq 1$
$y = \cos 3x$	Función trigonométrica	$(-\infty, \infty)$
$y = \ln x$	Función logarítmica	$(0, \infty)$
$y = e^x$	Función exponencial	$(-\infty, \infty)$
$y = -\sqrt{1 - 5x^2}$	Función algebraíca	$\left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$
$y = \ln(\sinh x)$	Función compuesta	$(0, \infty)$
$y = \frac{\sin x}{x}$	Producto de una racional con una trigonométrica	toda $x \neq 0$

Ejercicios. Grupo 2.

1. Un recipiente de gas, tiene la forma de un cilindro de largo 1.2 m, coronado en sus extremos por semiesferas de radio r, exprese el volumen del recipiente en función del radio r.

2. De un pedazo de cartón rectangular se cortan, en cada una de sus esquinas, cuadrados de lado x, despues doblando las orillas se forma una caja sin tapa de cierto volumen V. Exprese el volumen de la caja en términos de la variable x.

3. Grafique las siguientes funciones e indique su dominio.
a) $y = -\sqrt{x^2 + 2}$
b) $y = \ln(x^2 - 1)$
c) $y = \frac{1}{x}\sin x$
d) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$, y $g(x) = x - 2x^2$, encuentre el valor funcional de:
a) $(f + g)(x)$, b) $(f - g)(x)$, c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, d) $(fg)(x)$, e) $\left(-\frac{1}{2}g\right)(x)$, f) $(f \circ g)(x)$, g) $(g \circ f)(x)$.

5. Encuentre $f(1 + b) - f(1 - b)$ si $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

6. Encuentre $f(x)$ si $f(x - 2) = \frac{1}{x + 1}$, $x \neq -1$

7. Demuestre que la función $y = \cos^2 x$, es par y periódica, con período π.

8. Demuestre que si la función $y = f(x)$ es periódica, con período T, entonces la función $y = f(ax + b)$, $a \neq 0$, es periódica con período $\frac{T}{a}$.

9. ¿Son o no son iguales las dos siguientes funciones?.

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2), \quad g(x) = x^2 - 2\ln(x)$$

10. Demuestre que la siguiente función es impar: $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

11. Encuentre el dominio de las funciones:
a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$

13. Bosqueje la gráfica de la función $y = |x^2 - 4| - |x^2 - 9|$, e indique su dominio.

14. ¿Para qué números $a,\ b,\ c,$ y d la función

$$f(x) = \frac{ax + d}{cx + b}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para toda x?

15. Supóngase que H es una función tal que $(H \circ H)(y) = H(H(y)) = y$
Determine el valor de

$$\underbrace{(H \circ H \circ \cdots \circ H)}_{80 \text{ veces}}(y)$$

16. Demuestre que el producto de dos funciones pares es una función par , que el producto de una impar con una par es una función impar y que el producto de dos impares es una función par.

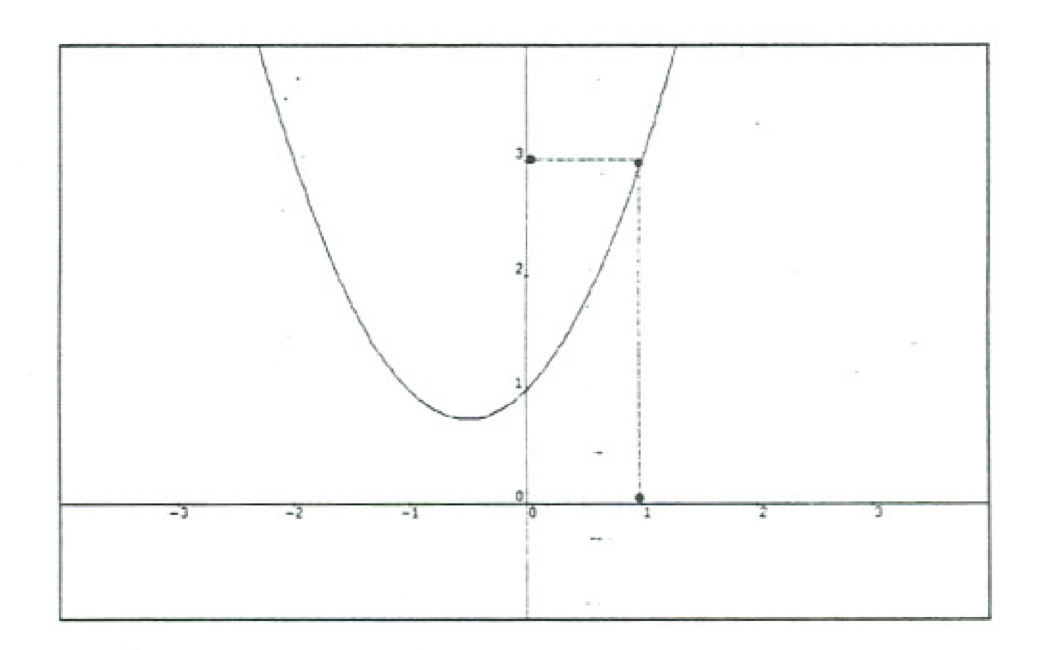
CAPITULO 3

3.1. Límites.

La escencia del cálculo es el concepto de límite; en el calculo diferencial el concepto más importante es el de la derivada, la cual es un límite, en el cálculo integral, la integral definida es también un límite,y con la ayuda de estos conceptos se pueden abordar distintos problemas como: ecuaciones de la tangente, valores máximos y mínimos de una función, áreas, volumenes, longitudes de arco, áreas de superficie, etc. , etc.

En el estudio de una función $y = f(x)$, resulta que es importante saber el valor que adquiere la función en un determinado punto x_0 de su dominio, esto es, el valor $f(x_0)$, pero en ocasiones resulta más importante saber hacia que valor se aproxima $f(x)$, cuando los argumentos x se están aproximando a un determinado valor x_0, el cual puede, o no, pertenecer al dominio de la función. El valor L, hacia el cual se están aproximando las ordenadas $f(x)$, en una función real, cuando sus argumentos o abscisas x se aproximan a un determinado punto x_0, se le llama "límite de $f(x)$" cuando x se aproxima al valor x_0", y se denota escribiendo $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Por ejemplo, en la función $y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, cuyo dominio son todas las $x \neq 1$, es fácil determinar el valor hacia el cual se aproximan las ordenadas $f(x)$, cuando las abscisas x se aproximan a un punto $x_0 \neq 1$. Por ejemplo, cuando x se aproxima a cero, tanto por la izquierda como por la derecha, vemos que las ordenadas correspondientes se aproximan al número 1, límite que se puede calcular simplemente sustituyendo $x = 0$ en la expresión del valor funcional, $f(0) = \frac{0^3 - 1}{0 - 1} = 1$. Pero, para calcular el límite, cuando x se aproxima al número 1, no podemos hacer la sustitución directa, ya que $f(1) = \frac{0}{0}$, da una forma indeterminada y $f(1)$ no existe, pues 1 no pertenece al dominio de la función. No obstante en la gráfica observamos que cuando x tiende al número 1, las ordenadas correspondientes se aproximan al número 3 en el eje-vertical, lo cual nos indica que $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$. (ver la gráfica de abajo).



Gráfica de $y = \frac{x^3-1}{x-1}$; cuando $x \to 1; y \to 3$

Para poder calcular este límite de manera algebraica, se tiene que hacer una "factorización" de la función y eliminar el término que causa la indeterminación, como se indica a continuación:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3 \qquad \text{(A1)}$$

después, como se puede ver, el límite se calcula en la función resultante (x^2+x+1), la cual tiene la particularidad de ser la misma función (tiene los mismos valores) que la anterior excepto en $x = 1$, el punto $(1,3)$ sí pertenece a la curva $y = x^2+x+1$, pero no pertenece a la curva $y = \frac{x^3-1}{x-1}$, siendo este el único punto donde difieren sus valores de manera que cuando x se aproxima al número 1, tanto por la izquierda como por la derecha, los valores que se van obteniendo son los mismos en ambas funciones , esto es, se estarán aproximando ambas al número 3, dicho de otra manera, ambas funciones tienen el mismo límite 3, cuando x se aproxima al número 1. De ahí que el procedimiento aplicado en (A1) resulta correcto.

Ejemplo. Procediendo de manera análoga calcular el límite indeterminado $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{0}{0}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x+1)} = \frac{4}{3}$$

En el concepto de límite lo importante es darse cuenta hacia dónde se están aproximando los valores $f(x)$ de la función, cuando sus argumentos x se aproximan a un

determinado número x_0. Si el valor al cual se aproximan las ordenadas $f(x)$ es L, entonces, el límite, se escribe de manera compacta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Intuitivamente este símbolo nos indica que cuando x se aproxima a x_0, las ordenadas correspondientes $f(x)$ se aproximarán, cada vez más, al número L, entre más cerca nos encontremos de x_0, en el eje-x, más cerca se encontrarán las ordenadas $f(x)$ del número L en el eje-y.

Veamos en un ejemplo concreto lo que esto significa y de paso veamos de que manera se puede manejar la idea de proximidad implícita en la definición de límite.

Consideremos nuevamente a la función

$$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

y pongamos en una tabla, valores cada vez más próximos al número 1, tanto aproximándonos por la derecha ($x \to 1^+$), como por la izquierda ($x \to 1^-$) y, al mismo tiempo indiquemos los valores correspondientes que va tomando la función.

$x \to 1^+$	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	$x \to 1^-$	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
2	7	0	1
1.5	4.75	0.5	1.75
1.1	3.31	0.9	2.71
1.01	3.0301	0.99	2.9701
1.001	3.003001	0.999	2.997001
1.0001	3.00030001	0.9999	2.99970001
1.00001	3.0000300001	0.99999	2.9999700001
1.000001	3.000003000001	0.999999	2.999997000001
1.0000001	3.00000030000001	0.9999999	2.99999970000001

La tabla anterior la podemos reescribir de la manera siguiente

cuando $a < x < b$	entonces $c < y < d$
$0 < x < 2$	$1 < y < 7$
$0.5 < x < 1.5$	$1.75 < y < 4.75$
$0.9 < x < 1.1$	$2.71 < y < 3.31$
$0.99 < x < 1.01$	$2.9701 < y < 3.0301$
$0.999 < x < 1.001$	$2.997001 < y < 3.003001$
$0.9999 < x < 1.0001$	$2.99970001 < y < 3.00030001$
$0.99999 < x < 1.00001$	$2.9999700001 < y < 3.0000300001$
$0.999999 < x < 1.000001$	$2.999997000001 < y < 3.000003000001$
$0.9999999 < x < 1.0000001$	$2.99999970000001 < y < 3.00000030000001$

empleando la notación de vecindades con valores absolutos se puede escribir

Si $\|x-1\| < \delta$	Entonces $\|y-3\| < \varepsilon$
$\|x-1\| < 1$	$\|y-3\| < 4$
$\|x-1\| < 0.5$	$\|y-3\| < 1.75$
$\|x-1\| < 0.1$	$\|y-3\| < 0.31$
$\|x-1\| < 0.01$	$\|y-3\| < 0.0301$
$\|x-1\| < 0.001$	$\|y-3\| < 0.003001$
$\|x-1\| < 0.0001$	$\|y-3\| < 0.00030001$
$\|x-1\| < 0.00001$	$\|y-3\| < 0.0000300001$
$\|x-1\| < 0.000001$	$\|y-3\| < 0.000003000001$
$\|x-1\| < 0.0000001$	$\|y-3\| < 0.00000030000001$
$\|x-1\| < 0.00000001$	$\|y-3\| < 0.0000000300000001$

Con estas expresiones, más o menos, resulta cómodo observar que para un número dado, $\varepsilon > 0$, por pequeño que este sea, digamos $\varepsilon = 0.0000300001$, es posible encontrar un número $\delta > 0$ (en este caso $\delta = 0.00001$, (o un número positivo menor), tal que

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |y-3| < \varepsilon$$

Para recalcar el hecho de que x se aproxima, sin necesidad de ser igual, a 1, se puede, en la notación de vecindades, escribir $0 < |x-1| < \delta$.

Entonces decir que 3 es el límite de la función $y = \frac{x^3-1}{x-1}$, cuando x se aproxima, por la derecha e izquierda, al número 1, es equivalente a afirmar que: Para cualquier $\epsilon > 0$ dado, por pequeño que este sea, existe al menos un número $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |y-3| < \varepsilon$$

donde $\delta(\epsilon)$ nos indica que el número δ depende o está en función de ε.

Generalizando el concepto y empleando los cuantificadores lógicos; $\forall$ "Para todo" y $\exists$ "Existe", podemos compactar la idea deciendo:

***Definición* 13.**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esta es la llamada definición "$\varepsilon - \delta$" del límite de una función dada por *Augustin- Louis Cauchy* (1789-1857), matemático Francés, uno de los que dieron rigor al cálculo.
Límites laterales.

Al considerar el límite de una función, cuando su argumento x se aproxima a un determinado punto a, la aproximación a dicho punto se puede realizar ya sea por la izquierda $(x \to a^-)$ ó por la derecha $(x \to a^+)$ y podemos distinguir los dos tipos de límites, que llamaremos laterales y que se definen como:

***Definición* 13*bis*.**

Límite por la derecha

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } a < x < a+\delta, \ \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

Límite por la izquierda

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } a-\delta < x < a, \ \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

Estos límites pueden existir o no , y si existen pueden ser iguales o diferentes; si alguno de ellos no existe o si existen ambos y son diferentes entonces decimos que el límite de la función $f(x)$, cuando $x \to a$, no existe.

El límite de la función $f(x)$ existe, cuando $x \to a$, si y sólo si existen ambos límites laterales y estos son iguales.

Teoremas sobre límites:

***Teorema* 3.1.**

- $\lim_{x\to x_0} K = K$; donde K es la función constante $K(x) = K$
- $\lim_{x\to x_0} (x) = x_0$; donde (x) es la función idéntica $y = x$.
- $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0} [f(x) g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) . \lim_{x\to x_0} g(x)$

como caso particular se tiene
$\lim_{x\to x_0} Kf(x) = K \lim_{x\to x_0} f(x)$, donde K es una constante.

- $\lim_{x\to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} g(x)$ y si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, entonces $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$. (Teorema del Sandwich)
- Si A es una constante positiva y diferente de uno y si $f(x)$ tiene límite, entonces

$$\lim_{x\to x_0} A^{f(x)} = A^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

Veamos algunos ejercicios, donde se apliquen estos teoremas.

Ejercicio 1. Calcular $\lim_{x\to 2}(x^2)$

Solución. $\lim_{x\to 2}(x^2) = \lim_{x\to 2}(x.x) = \lim_{x\to 2} x . \lim_{x\to 2} x = (2)(2) = 2^2$

De manera similar $\lim_{x\to a}(x^n) = a^n$

Ejercicio 2. Calcular el límite cuando $x \to (-1)$ del polinomio $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7$

Solución:

$$\lim_{x\to(-1)}(3x^3 - 2x^2 + x - 7) = \lim_{x\to(-1)} 3x^3 - \lim_{x\to(-1)} 2x^2 + \lim_{x\to(-1)} x - \lim_{x\to(-1)} 7$$

$$= 3(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) - 7 = p(-1) = -13$$

En general para un polinomio cualquiera $P(x)$, se tiene

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Ejercicio 3. Calcular el límite de la función racional $R(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5}$, cuando $x \to 2$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5} = \frac{2^2 - 4(2) + 3}{2^2 + 4(2) - 5} = \frac{-1}{7} = -\frac{1}{7}$$

Ejercicio 4. Calcular $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5}$

Solución: Al aplicar los teoremas se tiene $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5} = \dfrac{1^2 - 4(1) + 3}{1^2 + 4(1) - 5} = \dfrac{0}{0}$, que es una forma indeterminada, en estos casos, para evitar la indeterminación, se factoriza el término $(x - 1)$ en el numerador y denominador de la expresión obteniéndose

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+5)}$$

Ejercicio 5. Calcular el límite $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$

En efecto, por ser un límite indeterminado, factorizamos para obtener

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)}{(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)} = \frac{m}{n}$$

3.2. Algunos límites interesantes.

a) El límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1 + P_k(x)} - 1}{x} = \dfrac{a_1}{n}$; (donde $P_k(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$)

Solución: Observemos que $P_k(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$, polinomio de grado k sin término independiente, tiende a cero cuando $x \to 0$.

de manera que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+P_k(x)}-1}{x}=\dfrac{0}{0}$, es una forma indeterminada.

Para quitar la indeterminación, emplearemos la factorizacion

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1) \quad ó \quad (x-1)=\frac{x^n-1}{(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}$$

poniendo $x=\sqrt[n]{1+P_k(x)}$, se tendría

$$\sqrt[n]{1+P_k(x)}-1=\frac{P_k(x)}{(1+P_k(x))^{\frac{n-1}{n}}+(1+P_k(x))^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+P_k(x))^{\frac{1}{n}}+1}$$

teniéndose en el denominador n –sumandos, cada uno de los cuales se aproxima a 1, cuando $x\to 0$ (pues recuerde que en este caso $P_k(x)\to 0$)

de manera que al dividir por x ambos miembros tenemos

$$\frac{\sqrt[n]{1+P_k(x)}-1}{x}=\frac{a_1+a_2x+\cdots+a_kx^{k-1}}{(1+P_k(x))^{\frac{n-1}{n}}+(1+P_k(x))^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+P_k(x))^{\frac{1}{n}}+1}$$

al tomar límite cuando $x\to 0$, se tendría

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+P_k(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{1+1+\cdots+1}=\frac{a_1}{n}$$

o sea

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+P_k(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{n}$$

"El resultado del límite es igual al coeficiente de la variable de primer grado del polinomio $P_k(x)$, dividido entre el índice del radical".

Ejemplo. Encuentre el valor del límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x-5x^2}-\sqrt{1+5x+3x^2}}{\sqrt[5]{1+x-7x^2}-1}$

Solución. El límite lo podemos escribir $\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+3x-5x^2}-1\right)-\left(\sqrt{1+5x+3x^2}-1\right)}{\sqrt[5]{1+x-7x^2}-1}$

ahora, dividiendo numerador y denominador por x, se tiene

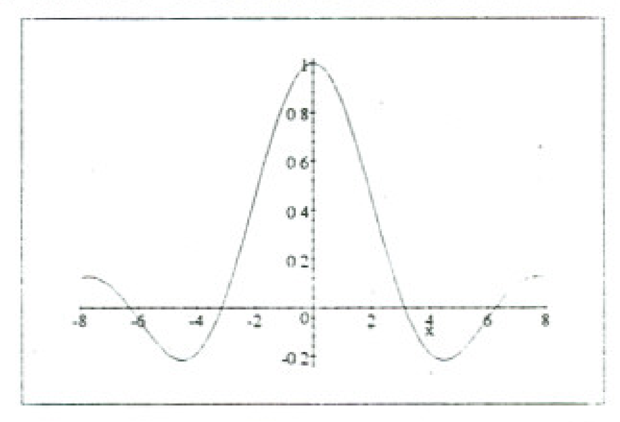
$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+3x-5x^2}-1\right)}{x}-\dfrac{\left(\sqrt{1+5x+3x^2}-1\right)}{x}}{\dfrac{\sqrt[5]{1+x-7x^2}-1}{x}}$$

y de acuerdo al resultado del ejercicio anterior se tendrá

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x-5x^2}-\sqrt{1+5x+3x^2}}{\sqrt[5]{1+x-7x^2}-1}=\frac{\frac{3}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{1}{5}}=-\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{5}}=-\frac{15}{2}$$

b) El límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

De la gráfica de la función $y=f(x)=\frac{\sin x}{x}$ resulta evidente que $y\to 1$ cuando $x\to 0$, esto es $\frac{\sin x}{x}\to 0$ cuando x se aproxima a cero por la derecha y por la izquierda

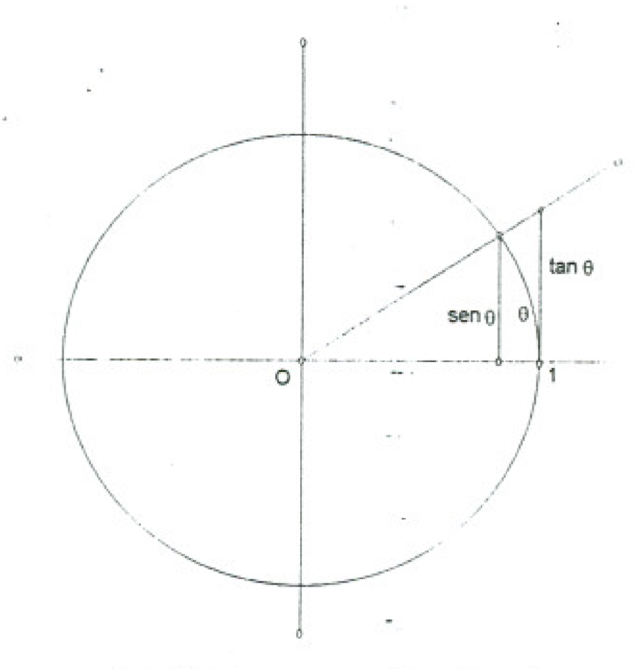


En una tabla de valores de esta función, también se aprecia como $\frac{\sin x}{x}\to 1$ cuando $x\to 0$

Por ser una función par, simétrica respecto del eje-y, únicamente tomaremos valores a la derecha del origen cada vez más próximos a cero.

x	$f(x)=\frac{\sin x}{x}$
1	$f(1)=.8414709848$
0.5	$f(0.5)=.9588510772$
0.1	$f(0.1)=.9983341665$
0.01	$f(0.01)=.9999833334$
0.001	$f(0.001)=.9999998333$

Veamos este límite con otra argumentación geométrica en la siguiente gráfica de la circunferencia unitaria



Las líneas $sen\theta$, $\tan\theta$ y el $arc\theta$

En la gráfica de arriba se ha puesto el arco θ en posición normal, la línea que representa a la función $\sin\theta$ y la línea para $\tan\theta$; de la gráfica, podemos observar que se cumple la desigualdad

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta; \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \pi$$

de la cual, al dividirla por $\sin\theta$, se obtiene

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{\tan\theta}{\sin\theta}, \quad ó$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

y de acuerdo al teorema del Sandwich, cuando $\theta \to 0$, se tendrá que como

$$\lim_{\theta\to 0} 1 = 1 = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}$$

entonces

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = 1$$

de manera que

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{1}{\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Con este resultado se pueden demostrar otros límites trigonométricos, como los siguientes.

Ejemplo 1. Demuestre que $\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$

En efecto sea

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}\,\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta+1}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos^2\theta-1}{\theta(\cos\theta+1)}=-\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta+1)}$$

$$=-\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\,\frac{\sin\theta}{(\cos\theta+1)}=-(1)\left(\frac{0}{1+1}\right)=0$$

Ejemplo 2. Demuestre que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\alpha x}{x}}{\frac{\sin\beta x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\beta\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\lim_{\alpha x\to 0}\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim_{\beta x\to 0}\frac{\beta\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha\lim_{\alpha x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\beta\lim_{\beta x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha(1)}{\beta(1)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Ejemplo 3. Demuestre que $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\alpha x}{x}=\alpha$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\alpha x}{x}=\lim_{\alpha x\to 0}\frac{\alpha\tan\alpha x}{\alpha x}=\alpha\lim_{\alpha x\to 0}\frac{\frac{\sin\alpha x}{\cos\alpha x}}{\alpha x}=\alpha\lim_{\alpha x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha x}\right)=\alpha(1)(1)=\alpha$$

Ejemplo 4. Demostrar que $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\alpha x}{\tan\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$

En efecto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\alpha x}{\tan\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan\alpha x}{x}}{\frac{\tan\beta x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\tan\alpha x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\tan\beta x}{x}}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Ejemplo 5. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

En efecto sea

$$z=\arcsin x$$

$$\therefore\quad x=\sin z$$

cuando $x\to 0,\ z\to 0,$ de manera que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{\sin z}{z}}=\frac{1}{1}=1$$

c) Otros límites importantes o notables son los siguientes:

- $\lim_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\text{Polinomio en } x \text{ de grado } n}{\text{Polinomio en } x \text{ de grado } m} = \begin{cases} 0, \text{ si } n<m \\ \infty, \text{ si } n>m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, \text{ si } n=m \end{cases}$

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}$ $(e \approx 2.718281828)$
- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1;\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a;\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x} = m$

Ejemplo 1. Hallar el límite $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$.

Solución:

Como es un cociente de polinomios del mismo grado y la variable tiende a infinito, entonces el resultado es el coeficiente de x^3 del numerador entre el coeficiente de x^3 en el denominador, o sea $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 2. Demuestre que $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = e^8$

Solución: Para la función racional al efectuar la división se tiene $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} = 1+\dfrac{8x-3}{x^2-3x+7}$, y el límite se puede escribir

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}$$

$$= \left[\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = e^8$$

en el último paso se hizo $\dfrac{8x-3}{x^2-3x+7} = z$ y se empleo el límite notable $\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$

En particular, se empleó la identidad,

$$y = A(x)^{f(x)} = e^{\ln A(x)^{f(x)}} = e^{f(x)\ln A(x)}$$

y propiedades de la función logarítmica, para obtener el límite

$\lim_{x\to a}y = \lim_{x\to a}A(x)^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}\ln A(x)} = e^{\ln(\lim_{x\to a}A(x))^{\lim_{x\to a}f(x)}} = \lim_{x\to a}A(x)^{\lim_{x\to a}f(x)}$.

3.3 Continuidad y discontinuidad.

Intuitivamente una función es continua si su gráfica no se corta , no le faltan puntos o

bien no tiene algún valor infinito (una asíntota vertical). Emplearemos el concepto de límite para definir la continuidad.

***Definición* 14.**

Una función $f(x)$ se dice que es continua en un punto a de su dominio si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

o en forma equivalente, si ponemos $a - x = h$, si $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.

Una función que no es continua se llama discontinua.

Una función es continua en un intervalo abierto (a,b) si esta es continua en todos los puntos del intervalo.

Una función $f(x)$ es continua en un cerrado $[a,b]$ si esta es continua en cada punto interior y si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

De entrada una función tiene que ser discontinua en todos los puntos que no sean de su dominio.

y si la función está bien definida en a pero su valor $f(a)$ no coincide, por alguna razón, con el límite de la función cuando $x \to a$, también se tendrá una discontinuidad en dicho punto.

De hecho, la definición implica que $f(x)$ es continua en $x = a$, si:

- $f(a)$ está bien definida (que es equivalente a decir que a pertenece a su dominio)
- El límite $\lim_{x\to a} f(x)$, exista. (Que sea un número finito y que los límites laterales existan y sean iguales)
- Que se dé la igualdad $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Realmente la última de estas condiciones implica las dos anteriores.

Tipos de discontinuidad.

- Removible. Si en una función, existen los límites laterales cuando $x \to a$ y si estos son iguales, pero $f(a)$ no tiene el mismo valor ó no está definida, como en la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, entonces se dice que la función tiene una discontinuidad *removible ó evitable* en $x = a$. Ya que la discontinuidad se puede evitar redefiniendo nuevamente a la función al poner $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.
- De salto. Si en una función ambos límites laterales existen en $x = a$, pero no son iguales, entonces se dice que la función tiene una discontinuidad de *salto o de brinco* en dicho punto. Por ejemplo la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.

- Infinita. Si en una función por lo menos alguno de los límites laterales se hace infinito en $x = a$, entonces la función tiene una discontinuidad *infinita* en dicho punto. Por ejemplo, las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$, tienen discontinuidades infinitas; la primera en $x = 0$ y la segunda en $x = \pm 1$.

Teoremas sobre continuidad.

***Teorema* 3. 2.**

Si dos funciones f y g son continuas en $x = a$ entonces las siguientes funciones también son continuas en a.

- La suma $f + g$
- La diferencia $f - g$ ó $g - f$
- El producto fg
- El cociente $\frac{f}{g}$, si $g(a) \neq 0$

***Teorema* 3.3.**

Si $\lim_{x \to a} g(x) = b$ y si $f(x)$ es continua en b, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x \to a} g(x))$.

***Teorema* 3.4.**

Si $g(x)$ es continua en a y si $f(x)$ es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en a; esto es,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(g(a))$$

***Teorema del valor intermedio* 3.5.**

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = w$.

Para una demostración de estos teoremas se recomienda ver el apéndice 1 del libro: Calculus, sexta edición, de SWOKOWSKI, OLINICK y PENCE. Editorial PWS PUBLISHING COMPANY.

Ejercicios. Grupo 3.

1. Encuentre $\lim_{x \to 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}$ Sol. ∞

2. Encuentre $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x}$ Sol. $\frac{3}{5}$

3. Hallar $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\ln(x+1)}$ Sol. 2

4. Encuentre $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^2 + x + 1)}{(x+2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x - 1)}$ Sol. 2

5. Calcule el límite $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x$ Sol. e^{10}

7. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[m]{\cos(nx)}}{x^2}$ Sol. $\frac{n^2}{2m}$

6. Encuentre $\lim_{x \to 0} \frac{1 - (\cos x)\left(\sqrt{\cos 2x}\right)\left(\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}$ Sol. 3

7. Encuentre el valor del límite $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ Sol. $\frac{a^2}{b^2}$

8. Para la función $y = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ indique:

a) El conjunto de puntos en los que es continua
b) Encuentre sus puntos de discontinuidad
c) Indique de que tipo son las discontinuidades.
d) Bosqueje una gráfica de la función.

9. Haga lo mismo que en el ejercicio anterior para las funciones
a) $y = \frac{1+x}{1+x^3}$
b) $y = \frac{1}{\ln|x-1|}$

10. ¿En que puntos es continua la función:

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número racional ?.} \end{cases}$$

11. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.
12. Si $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$. ¿Tiene f una discontinuidad evitable en $x = 0$? ¿Y si $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$?

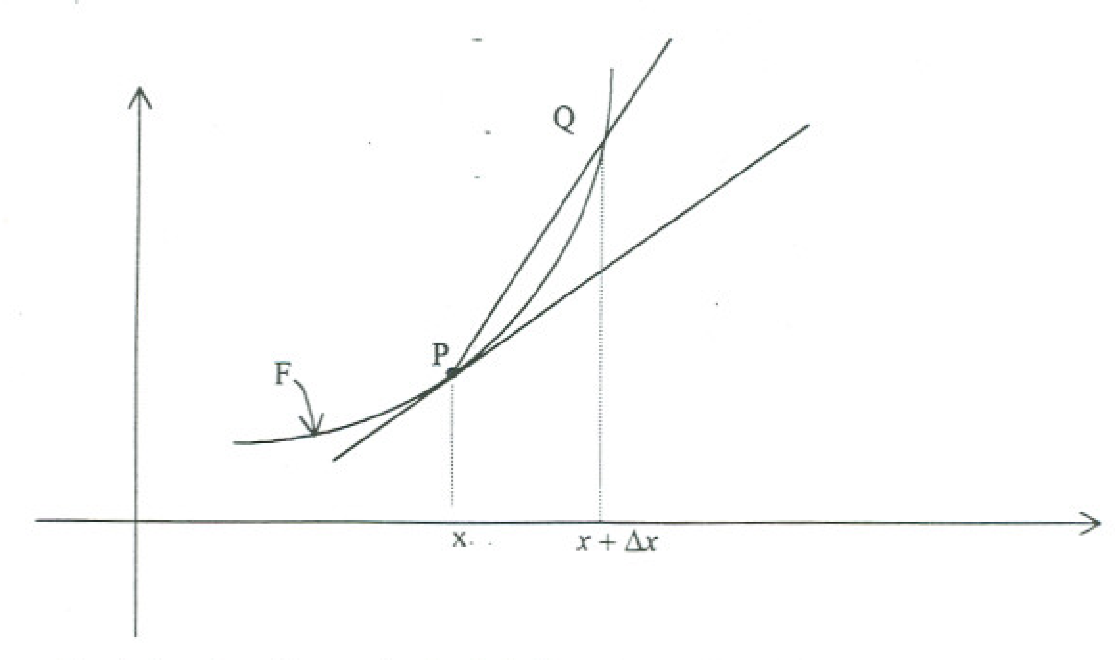
CAPITULO 4.
La derivada

El concepto fundamental del cálculo diferencial, como ya lo hemos dicho, es el de la derivada, el cual nos permite, entre otras muchas aplicaciones, obtener la pendiente de la línea tangente a una curva en un punto cualquiera y resolver problemas de valores extremos.

4.1 Definición e interpretación geométrica.

Para una función real $y = F(x)$, que se encuentre bien definida en alguna vecindad de x, si queremos encontrar la pendiente de la línea tangente a la curva en un punto arbitrario $P(x,y)$ de la misma, procedemos de la siguiente manera. Se considera un punto $Q(x+\Delta x, F(x+\Delta x))$ sobre la curva, cercano a P. La línea recta que pasa por los puntos P y Q es llamada línea secante y su pendiente estará dada por:

$$m_{PQ} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$



La derivada es la pendiente de la línea tangente en P

Al hacer cada vez más pequeño el incremento Δx, manteniendo fijo el punto P, el punto Q, deslizandose sobre la curva, se aproximará más a P, y la pendiente de la línea secante variará, aproximándose a la pendiente de la línea tangente a la curva en el punto P. De manera que podemos definir a la pendiente de la línea tangente a la curva, en un punto arbitrario $P(x,y)$, como el límite de la pendiente de la línea secante que pasa por P y Q, cuando el incremento Δx se aproxima e cero. Dicho límite se denota con el símbolo $F'(x)$, y se le llama derivada, o sea:

***Definición* 15. *Derivada*.**

Al límite

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

se le llama derivada de F con respecto a x.

Si denotamos con Δy al incremento de ordenadas $F(x+\Delta x) - F(x)$ podemos escribir

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'(x)$$

siendo $\frac{dy}{dx}$ y $y'(x)$ otras notaciones para expresar la derivada de $y = F(x)$ con respecto de x.

$F'(x)$ es una función de x, que nos indica la pendiente de la línea tangente a la curva $y = F(x)$ en cualesquiera de sus puntos.

Con la notación $F'(a)$ o bien con $y'(a)$ se indica el valor de la derivada en el punto de abscisa $x = a$.

O sea

$$F'(a) = y'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(a+\Delta x) - F(a)}{\Delta x}$$

se puede escribir este límite en otra forma poniendo $\Delta x = x - a$, con lo cual quedaría

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

que es otra manera de denotar la derivada de F en $x = a$. Si este límite existe decimos que la función es derivable (o diferenciable) en $x = a$ y al proceso de encontrar la derivada F' se le llama derivación de F.

Al cociente $\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ le llamaremos "cociente de Newton" de la función F, el cual abreviaremos escribiéndolo N_F, y si además en lugar de Δx ponemos una h, entonces la derivada de F
se puede escribir como

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} N_F$$

Veamos un ejemplo concreto de como calcular una derivada en cualquier punto del dominio de una función.

Ejemplo 1. Encontrar la derivada de $y = F(x) = x^2$, en cualquier punto de su dominio.
Solución: Primero encontremos su cociente de Newton

$$\begin{aligned} N_F &= \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} \\ &= 2x+h \end{aligned}$$

y ahora tomemos límite cuando $h \to 0$ para obtener la derivada

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} N_F = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

$$F'(x) = 2x$$

La derivada de la función $y = x^2$ es entonces $y' = 2x$.
Y la derivada en $x = 2$ será $y'(2) = 2(2) = 4$.

Conocida la derivada en el punto $P(a, F(a))$, se puede escribir la ecuación de la línea tangente a la curva en dicho punto, empleando la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_{0)}$$

empleando como punto, el punto de tangencia $P(a, F(a))$, y como pendiente a la derivada $y'(a)$.

Así por ejemplo, la ecuación de la línea tangente a la parábola $y = x^2$ en $x = 2$, será
Punto de tangencia $P(2,4)$, pendiente $m = y'(2) = 4$.
Siendo la ecuación de la tangente

$$y - 4 = 4(x-2)$$

ó $$y = 4x - 4$$

Ejemplo 2. Encuentre la derivada de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$
Solución:
El cociente de Newton será

$$\begin{aligned} N_y &= \frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c}{h} = \frac{2axh+ah^2+bh}{h} \\ &= 2ax+ah+b \end{aligned}$$

y al tomar límite cuando $h \to 0$ se tiene la derivada

$$y' = 2ax + b$$

Cuando únicamente existen los límites laterales, por la izquierda o por la derecha, del cociente de Newton, entonces se tendrá únicamente las correspondientes derivadas laterales.

4.2 *Reglas de derivación.*

Teorema* 4.1. *Reglas de Derivación.

- $\frac{dk}{dx} = 0$, donde k es una función constante.
- $\frac{dx}{dx} = 1$, siendo x la función idéntica $y = x$.
- $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$, donde u y v son funciones diferenciables de x.
- $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
- $\frac{d}{dx}(ku) = k\frac{du}{dx}$, donde k es constante.
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{u}\right) = -\frac{k}{u^2}$, donde k es constante.
- $\frac{d}{dx}(g(u(x))) = \frac{dg}{du}\frac{du}{dx}$, (Regla de la cadena)
- $\frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\frac{du}{dx}$, donde u es una función de x.
- $\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$
- $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\ln u) = \left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u\frac{dv}{dx}$

***Teorema* 4.2**. Si f tiene derivada en x entonces $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$

Demostración:

Puesto que

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} h$$

se tiene

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)\lim_{h\to 0} h$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = f'(x)0 = 0$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

Corolario. Si f tiene derivada en a entonces f es continua en a.

En efecto por el teorema anterior si f tiene derivada en a, entonces $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ lo cual significa que f es continua en $x = a$.

A continuación se dan algunas demostraciones de las reglas de derivación anteriores.

a) Para una función constante $y = k$ se tiene

$$N_k = \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

de manera que al tomar límite se tiene

$$(k)' = \lim_{h\to 0} N_k = 0$$

b) Para la función idéntica $f(x) = x$ se tiene

$$N_x = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

y al tomar límite se tiene

$$(x)' = \lim_{h\to 0} N_x = 1$$

c) Para una suma de funciones $F(x) = u(x) + v(x)$ se tiene como cociente de Newton

$$N_F = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h}$$

$$N_F = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = N_u + N_v$$

y al tomar límite cuando $h \to 0$ se tiene

$$F'(x) = [u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

de manera similar se demuestra que la derivada de una diferencia es

$$[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$$

d) El cociente de Newton de un producto de funciones $F(x) = u(x)v(x)$ será

$$\begin{aligned} N_F &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\ &= u(x+h)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ &= u(x+h)N_v + v(x)N_u \end{aligned}$$

al tomar límite cuando $h \to 0$, y teniendo en cuenta el Teorema 4.2, se tiene

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

Como caso particular, cuando u es una función constante k, se tiene

$$(kv)' = kv'$$

e) Para un cociente de funciones, primero demostraremos que si $v(x)$ es diferenciable, entonces

$\left(\frac{1}{v(x)}\right)$ es diferenciable y $\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

En efecto sea $F(x) = \frac{1}{v(x)}$, entonces el cociente de Newton para esta función será

$$\begin{aligned} N_F &= \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} \\ &= \frac{v(x) - v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} = -\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\frac{1}{v(x+h)v(x)} = -\frac{N_v}{v(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

y al tomar límite cuando $h \to 0$ tendremos y teniendo en cuenta el Teorema 4.2, se tiene

$$F'(x) = \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

o en forma compacta

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Y ahora sí, obtengamos la derivada de un cociente de funciones, escribiéndolo como un producto y empleando el resultado anterior

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\frac{1}{v}\right)' = u\left(\frac{1}{v}\right)' + \frac{1}{v}u' = -\frac{uv'}{v^2} + \frac{u'}{v}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

f) Regla de la cadena. La derivada de la función compuesta $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ está dada por

$$y' = f'(g(x))g'(x)$$

o, en la notación de Leibniz, poniendo $y = f(u)$, donde $u = g(x)$, quedaría

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Demostración. El cociente de Newton de la función compuesta es

$$N_{f \circ g} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

pongamos $u = g(x)$ y

$$k = g(x+h) - g(x)$$

entonces, es claro que cuando $h \to 0$, $k \to 0$ (Ver teorema 4.2) y $g(x+h) = u + k$ con esto el cociente de Newton queda

$$N_{f \circ g} = \frac{f(u+k) - f(u)}{h}$$

Si $k \neq 0$ para valores pequeños de h, podemos dividir y multiplicar por k este cociente y obtener

$$N_{f \circ g} = \frac{f(u+k) - f(u)}{k}\frac{k}{h} = \frac{f(u+k) - f(u)}{k}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

y al tomar límite cuando $h \to 0$ se tiene

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{k \to 0}\frac{f(u+k) - f(u)}{k}\lim_{h \to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

No es frecuente que $k = 0$ para valores pequeños de h; pero cuando esto sucede el argumento anterior ya no es válido. (Para aquellos lectores que esten interesados en una demostración que considere todos los casos le recomendamos vea el libro de "Cálculo I" de Serge Lang, del Fondo Educativo Interamericano, pag. 71, ó el libro de "Cálculo Infinitesimal", Vol. 1, de Michael Spivak, de la Editorial Reverte, pag. 226).

g) Para la función $y = \sin x$, tendremos que su cociente de Newton es

$$N_{\sin} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$

$$N_{\sin} = \sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}$$

y al tomar límite cuando $h \to 0$

$$(\sin x)' = \sin x(0) + \cos x(1) = \cos x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

Ahora, si consideramos el caso más general $y = \sin u$, donde $u = u(x)$ es una función diferenciable de x, podemos emplear la regla de la cadena para obtener

$$y' = (\sin u)' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

o sea

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

Procedimientos similares nos permiten demostrar las otras reglas de derivación. Se recomienda al lector que como ejercicio complete la demostración de las reglas que faltan.

A continuación procederemos a presentar algunos ejemplos concretos de derivación y algunas aplicaciones o interpretaciones de la derivada en otras ciencias.

4.3 *Ejercicios de derivación*.

1. Aplicando reglas adecuadas de derivación obtenga la derivada de las siguientes funciones:

- a) $y = 7x^3$
- b) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + \sqrt{3}\,x - 7$
- c) $g(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x + 5}$
- d) $y = x^2 \sin 5x$
- e) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 1}$

Soluciones:

a) $y' = 7(x^3)' = 7(3)x^2 = 21x^2$

b) $f'(x) = (3x^4)' - (5x^2)' + \left(\sqrt{3}\,x\right)' - (7)' = 12x^3 - 10x + \sqrt{3}$

c)

$$g'(x) = \frac{(x+5)(2x^2-3x+1)' - (2x^2-3x+1)(x+5)'}{(x+5)^2} = \frac{(x+5)(4x-3) - (2x^2-3x+1)(1)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{4x^2+17x-15-2x^2+3x-1}{(x+5)^2} = \frac{2x^2+20x-16}{(x+5)^2} = \frac{2(x^2+10x-8)}{(x+5)^2}$$

d) $y' = x^2(\sin 5x)' + \sin 5x(x^2)' = x^2(5\cos 5x) + 2x\sin 5x = 5x^2\cos 5x + 2x\sin 5x$

e) $y' = \dfrac{(2x^2-5x+1)'}{2\sqrt{2x^2-5x+1}} = \dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+1}}$

2. Cuando una función $y = f(x)$ tiene una interpretación específica en alguna ciencia, su derivada se interpreta como la rapidez o tasa de cambio de la función, respecto de su argumento.

Así, si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ representa la velocidad media durante un periodo de tiempo Δt y $\frac{ds}{dt}$ representa la velocidad instantánea o rapidez de cambio del desplazamiento de la partícula en función

del tiempo.
Por ejemplo si la posición de una partícula se expresa con la función
$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, donde t está en segundos y s en metros.

a) Calcula la velocidad de la partícula en un tiempo t cualquiera.
b) ¿Cuál es la velocidad transcurridos cuatro segundos?.
c) ¿Cuándo se encuentra en reposo la partícula?.
d) ¿Cuándo se mueve la partícula en dirección positiva?
e) Calcula la distancia total recorrida por la partícula durante los cinco primeros segundos.

Solución.

a) La velocidad en cualquier tiempo t, está dada por la derivada $f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$.
b) Cuando $t = 4s$ se tiene que la velocidad es $f'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9\ m/s$.
c) La partícula estará en reposo cuando la velocidad sea cero, o sea para cuando
$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) = 0$, lo cual se cumple para $t_1 = 1$ y $t_2 = 3$.
d) La particula se moverá en dirección positiva cuando $f'(t) > 0$, o sea para cuando

$$3t^2 - 12t + 9 > 0$$

$$3(t-1)(t-3) > 0$$

desigualdad que se cumple para $t < 1$ y $t > 3$. El desplazamiento es positivo durante el primer segundo y despues del tercer segundo , siendo negativo en el intervalo $(1,3)$.

e) La distancia recorrida se calcula por tramos, en el tramo de $t = 0$ a $t = 1$, es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4\ m$$

en el tramo de $t = 1$ a $t = 3$

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4\ m$$

y finalmente , de $t = 3$ a $t = 5$

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20\ m$$

Por lo tanto la distancia recorrida en los cinco primeros segundos es

$$4 + 4 + 20 = 28\ m$$

3. Supongamos que para una empresa determinada $C(x)$ representa el costo total necesario para producir x unidades de un producto. La función $C(x)$ es llamada función costo. Si la cantidad de artículos de producción aumenta de x a $x + \Delta x$, el costo adicional es $\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x)$ y la tasa promedio de cambio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Los economistas llaman **costo marginal** al límite de este cociente de Newton cuando $\Delta x \to 0$, esto es, a la derivada, o tasa instantánea de cambio del costo, con respecto a la cantidad de artículos producidos.

$$\text{Costo marginal} = C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Observación. Como por lo general x sólo puede adoptar valores enteros, como que no tiene mucho sentido dejar que $\Delta x \to 0$, pero esto se puede hacer ya que la función de costo $C(x)$ que se toma como modelo se maneja matemáticamente como una función continua.

Si hacemos que $\Delta x = 1$ y que n, unidades producidas, sea grande comparado con Δx, tendremos

$$C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$$

O sea, que el costo marginal de producir n unidades es, aproximadamente, igual al costo de elaborar una unidad más después de la n, la enésima más uno.

Por lo general una función costo total se representa mediante un polinomio, digamos

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo constante inicial (renta, servicios, mantenimiento) y los demás términos indican el costo de las materias primas, la mano de obra y demás. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de mano de obra podrían depender, en parte, de mayores potencias de x, por los tiempos extras y las ineficiencias que acarrean las operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, supongamos que una empresa ha estimado que el costo de producir x artículos es

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0.01x^2$$

Entonces, la función costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

Cuando el nivel de producción alcanza 500 artículos, el costo marginal es

$$C'(500) = 5 + (0.02)500 = \$15/\mathit{artículo}.$$

El costo de producción del artículo 501 es

$$C(501) - C(500) = \$15.01$$

Aqui se nota que

$$C'(500) \approx c(501) - C(500)$$

4.4. *Derivación implícita y derivadas de orden superior.*

Cuando una función se encuentra dada en forma implícita, como por ejemplo las funciones implícitas en $x^2 + y^2 = r^2$ o las que se encuentran dadas en $x^3 + y^3 = 6xy$, esto es, cuando no se encuentra despejada la función $y = f(x)$ y queremos obtener su derivada y', se puede derivar, respecto de x, término a término la expresión y del resultado despejar

a la y'.
Ejemplo 1. Por ejemplo para las funciones algebraícas $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, implícitas en $x^2 + y^2 = r^2$, su derivada explícita es, para el radical positivo:

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

y para el radical negativo

$$y' = \frac{-2x}{2\left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)} = -\frac{x}{y}$$

que, como puede verse, en ambos casos queda $-\frac{x}{y}$.

Este mismo resultado se puede obtener derivando "implícitamente" ambas funciones contenidas en

$$x^2 + y^2 = r^2$$

En efecto, derivando término a término, respecto de x, se tiene

$$2x + 2yy' = 0$$

y despejando a y'

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Ejemplo 2. Veamos la derivada implícita para la curva $x^3 + y^3 = 6xy$, denominada "hoja de Descartes", y la obtención de su tangente en el punto $P(3,3)$.
Derivando término a término y despejando a y'

$$3x^2 + 3y^2y' = 6(xy' + y)$$
$$3y^2y' - 6xy' = 6y - 3x^2$$
$$y'(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2$$
$$y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x}$$
$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

y la pendiente en $P(3,3)$ es

$$y' = \frac{2(3) - 3^2}{3^2 - 2(3)} = \frac{-3}{3} = -1$$

siendo la ecuación de la tangente

$$y - 3 = -1(x - 3)$$

o $$x + y = 6$$

Despejar a las funciones implícitas, aunque es posible en algunos casos, resulta realmente complicado,
Así, para la hoja de Descartes, despejar de la ecuación cúbica $x^3 + y^3 = 6xy$ a la y, da como resultado las siguientes tres funciones

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 8x^3}}$$

$$y = \frac{1}{2}\left[-y_1 \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 8x^3}} \right) \right]$$

y obtener la derivada explícita de estas funciones sería terrible.

La derivación implícita es igualmente fácil con ecuaciones como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

para la cual es imposible despejar y en términos de x.

Ejercicio. Encuentre y' si $\sin(x+y) = y^2 \cos x$

Solución:

Derivando término a término, respecto de x, se tiene:

$$\cos(x+y)(1+y') = y^2(-\sin x) + \cos x(2yy')$$

$$y'[\cos(x+y) - 2y\cos x] = -y^2 \sin x - \cos(x+y)$$

$$y' = \frac{y^2 \sin x + \cos(x+y)}{2y\cos x - \cos(x+y)}$$

Derivadas de orden superior.

Al derivar una función $y = f(x)$ se obtiene la función $y' = f'(x)$ que es otra función de x, la cual se puede volver a derivar para obtener la función $y'' = f''(x)$, que es la derivada de $f'(x)$, y de igual manera se pueden obtener las derivadas de orden superior $f'''(x), f^{(4)}(x), ..., f^{(n)}, ...$; en la notación de Leibniz, los símbolos para la segunda, tercera, cuarta ó n –ésima derivada, son

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}, ...$$

Ejemplo. Obtener la cuarta derivada de la función $y = \frac{1}{x}$ y de los resultados obtenidos infiera la n –ésima derivada.

Solución:

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{2(3)x^2}{x^6} = -\frac{3!}{x^4}$$

$$y^{(4)} = \frac{3!(4)x^3}{x^8} = \frac{4!}{x^5}$$

Observe que los resultados anteriores nos dan la pauta para afirmar que la n –ésima derivada es:

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

La misma función $y = \frac{1}{x}$, puede considerarse como la derivada de orden cero.

Ejemplo. Encuentre la quinta derivada del polinomio de grado quinto

$$P_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Solución:

$$P_5'(x) = 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$
$$P_5''(x) = 5(4)a_5x^3 + 4(3)a_4x^2 + 3(2)a_3x \quad + 2a_2$$
$$P_5'''(x) = 5(4)(3)a_5x^2 + 4(3)(2)a_4x + 3(2)a_3$$
$$P_5^{(4)}(x) = 5(4)(3)(2)a_5x + 4(3)(2)a_4$$
$$P_5^{(5)}(x) = 5(4)(3)(2)a_5 = 5!a_5$$

En general la n –ésima derivada de un polinomio $P_n(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$, de grado n será:

$$P_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

y las derivadas de orden $n+1$, o mayor, serán cero.

Ejercicio. Demostrar que $(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right)$

***Teorema* 4.3**.

Si u y v son funciones con derivadas de orden n, y α y β son constantes, entonces las funciones

$(\alpha u \pm \beta v)$ y uv tienen derivadas de orden n y:

$$(\alpha u \pm \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} \pm \beta v^{(n)}$$
$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n u^{(n-k)} v^{(k)}$$

La última expresión es conocida con el nombre de Fórmula de Leibniz.

Ejemplo. Calcular la n - ésima derivada de la función $f(x) = x^2 \cos 2x$.

Solución: Aplicando la fórmula de Leibniz, con $u = \cos 2x$ y $v = x^2$, se tiene

$$(uv)^{(n)} = C_0^n(\cos 2x)^{(n)}x^2 + C_1^n(\cos 2x)^{(n-1)}(x^2)' + C_2^n(\cos 2x)^{(n-2)}(x^2)''$$

siendo los demás sumandos nulos ya que la derivada de orden tres y superiores de x^2son nulas.

Teniendo en cuenta que $(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right)$, podemos escribir:

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$$
$$(\cos 2x)^{(n-1)} = 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) = 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$$
$$(\cos 2x)^{(n-2)} = 2^{n-2} \cos\left(2x + \frac{\pi(n-2)}{2}\right) = -2^{n-2} \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

y por lo tanto

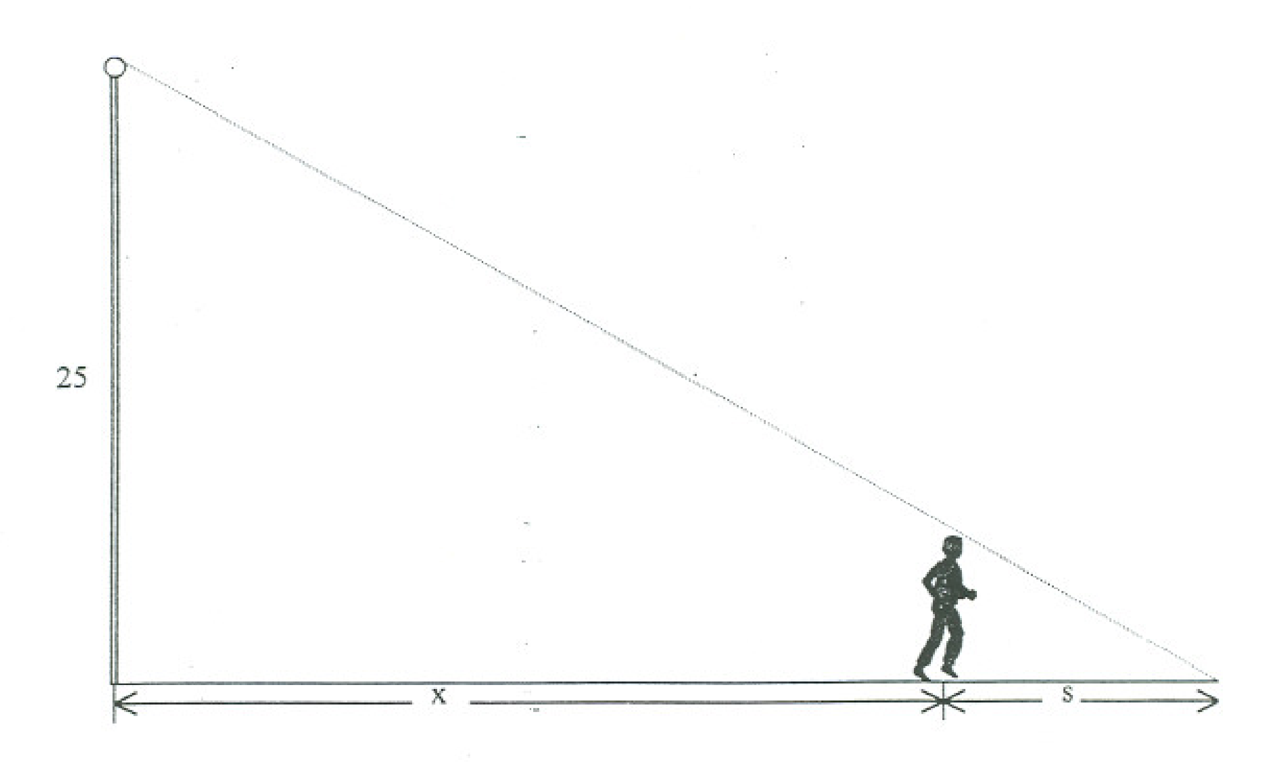
$$(x^2\cos 2x)^{(n)} = 2^n\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)x^2 + n\left[2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)\right](2x) + \frac{n(n-1)}{2}\left[-2^{n-2}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)\right]2$$

$$(x^2\cos 2x)^{(n)} = 2^n\left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right) + 2^n nx\sin\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$$

4.5 Tasas de cambio relacionadas.

En algunos problemas se describen situaciones relacionadas con dos variables, que cambian con respecto del tiempo, donde una de las razones de cambio se conoce y la otra no, pero donde la razón incógnita es posible conocerla en función de la primera. El método, en términos generales, consiste en describir el fenómeno o problema mediante una ecuación que relacione las dos variables. Después se deriva la ecuación y se expresa la derivada buscada en términos de la derivada conocida. Siempre que sea posible, se recomienda dibujar una figura que muestre la relación geométrica entre las variables.

Ejemplo. En lo alto de un farol brilla una luz a 25 pies del suelo. Un hombre con estatura de 6 pies se aleja caminando desde el farol. ¿Cuál es la longitud de su sombra cuando está a 40 pies de distancia respecto de la base del farol?. Si camina a razón de 5 pies por segundo. ¿a qué velocidad aumenta su sombra en ese punto?.
Solución:



Sea s la longitud de la sombra y sea x la distancia entre el hombre y la base del poste. Entonces, por semejanza de triángulos, vemos que

$$\frac{25}{x+s} = \frac{6}{s}$$

Multiplicando en cruz obtenemos

$$25s = 6x + 6s$$

de donde

$$s = \frac{6}{19}x$$

derivando esta ecuación, termino a termino, respecto del tiempo t, obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{6}{19}\frac{dx}{dt}$$

según los datos $\frac{dx}{dt} = 5$, por lo que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{30}{19}\ pies/seg.$$

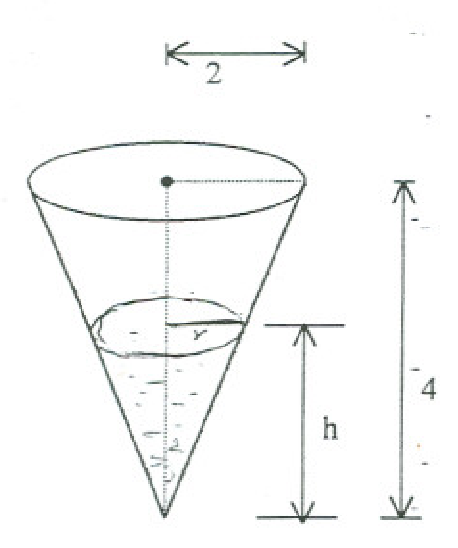
La sombra aumenta a razón de $\frac{30}{19}$ pies cada segundo.

Además, cuando $x = 40$ tendremos que la longitud de su sombra es

$$s = \frac{6}{19}(40) = \frac{240}{19} \approx 12.63\ pies$$

Ejemplo. Un tanque de agua tiene forma de un cono circular invertido, con radio de la base igual a 2 m y 4 m de altura. Si se le bombea agua, con un gasto de 2 m^3/min, calcula la velocidad con que sube el nivel del agua cuando la profundidad alcanza tres metros.

Solución: Sean V, r, y h el volumen del agua, el radio de la superficie y la altura, cuando el tiempo es t, con t expresado en minutos.



La razón que se da como dato es $\frac{dV}{dt} = 2\ m^3/\text{min}$. y se pide calcular $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = 3\ m$.

El volumen del líquido será:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

el cual, como se observa, está escrito en términos de r y h. Resulta conveniente expresar

a V en función únicamente de h, para lo cual podemos emplear triángulos semejantes (ver figura) y escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{h}{2}$$

con lo que el volumen quedará

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

y al derivar, ambos miembros, respecto del tiempo t, se tiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

de manera que, la razón incógnita quedará

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

sustituyendo $\frac{dV}{dt} = 2\ m^3/\text{min}$ y $h = 3\ m$, se obtiene

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}(2) = \frac{8}{9\pi} \approx 0.28\ m/\text{min}.$$

4.6. Máximos y mínimos y el teorema del valor medio.

Enunciaremos dos teoremas básicos del cálculo diferencial sobre los cuales se basarán otros resultados importantes del cálculo. Pero antes veamos algunas definiciones necesarias para el tema.

Valores máximos y mínimos.

***Definición* 16.**

Una función tiene un **máximo absoluto** en c si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en el dominio D_f de la función. El número $f(c)$ se llama **valor máximo** de f en D_f.
Análogamente, f tiene un **mínimo absoluto** en c si $f(c) \leq f(x)$ para toda $x \in D_f$, y $f(c)$ se denomina **valor mínimo** de f en D_f.
Los valores máximo y mínimo de f se conocen como valores extremos de la finción.

***Definición* 17.**

Una función tiene un **máximo local o máximo relativo** en c si hay un intervalo abierto I que contiene a c, tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para toda $x \in I$. Asimismo, f tiene un **mínimo local** en c si existe un intervalo abierto I que contenga a c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda $x \in I$.

***Teorema* 4.4. *Teorema del valor extremo*.**

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f alcanza al menos, un valor máximo absoluto $f(c)$, y un valor mínimo absoluto, $f(d)$, en ciertos números c y d, en $[a,b]$.

***Teorema* 4.5. *Teorema de Fermat*.**

Si f tiene un extremo local (máximo o mínimo) en c, y si existe $f'(c)$, entonces $f'(c) = 0$.

***Definición* 18. *Números críticos*.**

Un número crítico de una función f es un número $c \in D_f$, tal que $f'(c) = 0$. o bien

$f'(c)$ no existe.
Procedimiento para determinar máximos o mínimos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado.

Para determinar los valores máximo o mínimo absolutos de una continua f en un intervalo cerrado $[a,b]$:

- Se determinan los números críticos de f.
- Se determinan los valores de f en los números críticos de f en (a,b).
- Se encuentran los valores de $f(a)$ y $f(b)$.
- El valor máximo de los obtenidos en los pasos anteriores es el valor máximo absoluto; el valor mínimo de los obtenidos es el valor mínimo absoluto.

Ejemplo. Encuentre los valores extremos, máximo y mínimo absoluto, de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad \text{en el intervalo} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

Solución:

La función obviamente es continua en $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$
apliquemos el método descrito anteriormente:

Derivemos para saber dónde hay números críticos

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

que como puede verse $f'(x)$ existe para toda x, de modo que los únicos números críticos se presentarán cuando $f'(x) = 0$, o sea para cuando $x = 0$ o $x = 2$, ambos en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$.

Calculemos ahora los valores de f en los números críticos y en los extremos del intervalo, los que se dan en la siguiente tabla

x	0	2	$-\frac{1}{2}$	4
$f(x)$	1	-3	$\frac{1}{8}$	17

De estos cuatro valores el mayor es 17 y el menor es -3.
De manera que, en el intervalo cerrado considerado, la función tiene el valor máximo absoluto $f(4) = 17$,
y el valor mínimo absoluto $f(2) = -3$.

Ejercicio. ¿Porqué es evidente que la función $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$, no tiene máximo ni mínimo local.?
Solución:
Ten en cuenta, de acuerdo al Teorema de Fermat, en los extremos locales donde la derivada existe esta debe ser cero y ten en cuenta que la función

$$f'(x) = 101x^{100} + 51x^{50} + 1 = 0$$

tiene como dominio a todos los reales y no se anula para ninguna x.

Teorema 4.6. Teorema de Rolle.

Sea $f(x)$ una función que satisface las hipótesis siguientes:

1. $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$.
2. $f(x)$ es diferenciable en el intervalo abierto (a,b).
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces existe un número $c \in (a,b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Demostración:

El caso trivial es cuando $f(x) = k$; k una constante.

Ya que, en este caso, $f'(x) = 0$, para toda x, así que c puede ser cualquier número de (a,b).

Si la función no es constante, se pueden considerar dos casos.

Caso I. Cuando $f(x) > f(a)$ para una $x \in (a,b)$.

De acuerdo con el teorema del valor extremo, que se puede aplicar a f por ser continua en $[a,b]$, esta tiene un valor máximo en algún punto de $[a,b]$ y , por ser $f(a) = f(b)$, debe ser en un punto c del intevalo abierto (a,b). Esto nos dice que f tiene un máximo local en c; y de acuerdo al teorema de Fermat se tiene que $f'(c) = 0$.

Caso II. Cuando $f(x) < f(a)$ para una $x \in (a,b)$.

De acuerdo con el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a,b]$ y, puesto que $f(a) = f(b)$, alcanza este valor mínimo en un número $c \in (a,b)$ y, nuevamente por el teorema de Fermat, $f'(c) = 0$.

Aplicación.

Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una, y sólo una raíz real.

Solución.

Primero hagamos ver que la ecuación tiene al menos una raíz real. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$, entonces podemos observar que $f(0) = -1$ y que $f(1) = 1$, la función cambia de signo, y por ser f continua en $[0,1]$, el teorema del valor intermedio establece que existe un número $c \in (0,1)$, tal que $f(c) = 0$; lo que nos confirma que f tiene al menos una raíz.

Para demostrar que la ecuación sólamente tiene una raíz, recurrimos al teorema de Rolle.

y un argumento por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos raices reales a y b, entonces

$f(a) = f(b) = 0$ y, como f es un polinomio, es diferenciable en (a,b) y continuo en $[a,b]$ y por el teorema de Rolle, hay un número $c \in (a,b)$, tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 0 \text{ para toda } x$$

de manera que $f'(x)$ jamás puede ser cero, contrario a la afirmación del teorema de Rolle. En consecuencia la ecuación no puede tener dos raices reales diferentes.

La principal aplicación del teorema de Rolle es en la demostración de un importante teorema, llamado del valor medio, enunciado por primera vez por Joseph-Louis Lagrange.

Teorema 4.7

***Teorema* 4.7. *Teorema del valor medio*.** Sea f una función que satisface las siguiente hipótesis:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$.

2. f es diferenciable en el intervalo abierto (a,b).
Entonces, existe un número $c \in (a,b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

o bien

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Demostración: En la demostración se aplicará el teorema de Rolle a una nueva función h, definida como la diferencia entre f y la función cuya gráfica es la secante que une a los puntos $A[a,f(a)]$ y $B[b,f(b)]$, cuya ecuación es:

$$y-f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\text{o } y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Entonces h será

$$h(x) = f(x)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Primero veamos que h cumpla las tres hipótesis del teorema de Rolle.
1. La función h es continua en $[a,b]$ por ser la suma de f y un polinomio de primer grado, y ambas son continuas.
2. La función h es diferenciable en (a,b) pues tanto f como el polinomio de primer grado son diferenciables y de hecho

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

3. Se cumple que $f(a) = f(b)$.
En efecto

$$h(a) = f(a)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$h(b) = f(b)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b)-f(a)-f(b)+f(a) = 0$$

por lo tanto según este teorema existe $c \in (a,b)$, tal que $h'(c) = 0$, y por lo tanto

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

de modo que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

***Teorema* 4.8**. Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a,b) entonces f es constante en (a,b).

Demostración: Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en (a,b), con $x_1 < x_2$; como f es diferenciable en (a,b), debe serlo en (x_1,x_2), y continua en $[x_1,x_2]$. Con el teorema

del valor medio aplicado a f en el intevalo $[x_1, x_2]$ obtenemos que existe un número $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

y dado que $f'(x) = 0$ para toda x, $f'(c) = 0$, con lo que la ecuación anterior quedaría

$$f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$\text{o} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

lo cual nos indica que f es una función que tiene el mismo valor en dos números cualesquiera de (a,b), o, dicho en otras palabras, que f es constante en (a,b).

Corolario. Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en el intervalo (a,b), entonces $f - g$ es constante en (a,b); o sea, $f(x) = g(x) + c$, donde c es una constante.

Demostración: Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Entonces

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda $x \in (a,b)$, y de acuerdo al teorema anterior $F = f - g$ es constante.

Ejercicio. Demostrar que $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

Demostración: Si $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

para todos los valores de x; por consiguiente, según el teorema anterior,

$$f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x = C$$

para determinar el valor de la constante C, sea $x = 1$. Entonces

$$C = f(1) = \arctan 1 + \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

de modo que

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio. Encuentre el número c, mencionado en el teorema del valor medio, para la función cuadrática

$$y = F(x) = Ax^2 + Bx + C$$

en el intervalo $[a,b]$.

Solución: De acuerdo al teorema

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$$

$$\frac{Ab^2+Bb+C-Aa^2-Ba-C}{b-a} = 2A(c)+B$$

$$\frac{A(b^2-a^2)+B(b-a)}{b-a} = 2Ac+B$$

$$A(b+a)+B = 2Ac+B$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Para una parábola el número c es el punto medio del intervalo $[a,b]$.

4.7. *Diferencial de una función*.

Al evaluar en un punto $x+\Delta x$ una función derivable, $f(x)$, donde Δx es un incremento pequeño de x , se puede aproximar este valor por la expresión $f'(x)\Delta x$, llamada diferencial de la función f en $x+\Delta x$, y denotadada con df o dy. Esto es

$$df = dy = f'(x)\Delta x$$

En efecto al considerar las ordenadas de una función derivable, en x y en $x+\Delta x$, tendremos que el incremento correspondiente para y es $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ y de acuerdo a la definición de la derivada se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

lo cual significa que

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \approx f'(x), \text{ para valores pequeños de } \Delta x$$

de manera que si α expresa la diferencia entre estas cantidades, entonces

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)+\alpha, \text{ donde } \alpha \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

y por lo tanto

$$f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$

o

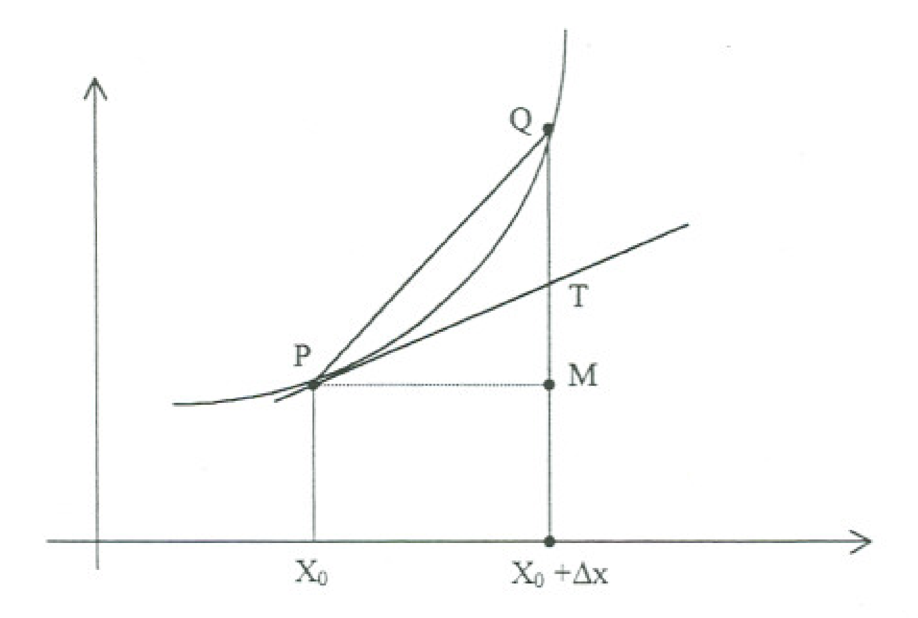
$$\Delta y = df + \alpha\Delta x$$

siendo entonces

$$\Delta y \approx df, \text{ para valores pequeños de } \Delta x$$

que tambien se puede escribir

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x \qquad \text{(D)}$$



En la figura anterior es inmediato que el segmento $\overline{MT} = \tan(\sphericalangle MPT).\overline{PM} = f'(x)\Delta x = dy$
Si para el punto $P(x,f(x))$, de la gráfica de $f(x)$, fijamos su abscisa en $x = x_0$ se tiene que la expresion (D) quedaría:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

y si denotamos con x al punto $x_0 + \Delta x$, tendremos

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{(D.A)}$$

lo cual nos está indicando que para calcular la ordenada de la función en un punto x, cercano a x_0, se puede emplear , como aproximación, la ordenada correspondiente de la línea tangente a la curva en P, cuya ecuación es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a esta aproximación se le llama "linealización local" de f en las proximidades de x_0.
Por ejemplo la linealización local para $f(x) = \ln x$, en las cercanias de $x_0 = 1$, es:

$$\ln x \approx \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

$$\ln x \approx x - 1$$

Por ejemplo, para calcular el valor de $\ln(1.01)$, podemos poner

$$\ln(1.01) \approx 1.01 - 1 = 0.01$$

$$\ln(1.01) \approx 0.01$$

Otro ejemplo. Obtener la aproximación lineal de $f(x) = \sin x$, en la proximidad de $x_0 = 0$.
Solución:

$$\sin x \approx \sin(0) + \cos(0)(x - 0)$$

$$\sin x \approx x$$

lo cual nos indica que en las proximidades de 0, $\sin x$ es "casi" igual que x.
Use esta linealización para calcular el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin 3h}{h}$$

Solución: Como $\sin 3h \approx 3h$, se tiene

$$\frac{\sin 3h}{h} \approx \frac{3h}{h} = 3$$

de manera que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin 3h}{h} = 3$$

Notación con diferenciales.

Si consideramos la función idéntica

$$y = f(x) = x$$

tendremos

$$df = f'(x)\Delta x = (1)\Delta x = \Delta x$$

y si convenimos en indicar la diferencial de esta función $y = f(x) = x$, con dx, se tendrá

$$dx = \Delta x$$

esto es: "la diferencial de la función idéntica es igual al incremento Δx"

Con esto, la diferencial de una función $y = f(x)$ se puede escribir

$$dy = f'(x)dx$$

Una expresión con derivadas se puede escribir con diferenciales.

Por ejemplo, la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} + y = 5$$

se puede escribir, de manera equivalente, en forma diferencial como

$$xdy + ydx = 5dx$$

$$\text{o} \quad xdy + (y-5)dx = 0$$

Ejemplo. La conocida fórmula para la derivada de un producto de dos funciones diferenciables es:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

esta expresión con diferenciales quedaría

$$d(uv) = udv + vdu$$

4.8. Criterio de la primera y segunda derivada para máximos y mínimos.

El cálculo resulta de utilidad para el trazo de gráficas ya que nos permite analizar la curva e indicarnos en que intervalos crece o decrece, en que puntos tiene máximos o mínimos, en que tramos es cóncava hacia arriba o hacia abajo en donde hay asíntotas horizontales o verticales, etc.

***Definición* 19**. Una función f es creciente en un intervalo I, si

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{para cuando} \quad x_1 < x_2 \quad \text{en } I$$

y es decreciente en I si

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{para cuando} \quad x_1 < x_2 \quad \text{en } I$$

Una función creciente (o decreciente) en I es llamada monótona en I.

Ejemplo. Para la parábola $y = x^2$ resulta claro que es una función decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$. Entonces es monótona en $(-\infty, 0]$ y es tambien monótona en $[0, \infty)$, pero no lo es en $(-\infty, \infty)$.
Si observamos la gráfica de una función continua y derivable, podemos notar que en los puntos donde tiene pendiente positiva, la curva es creciente y donde tiene pendiente es negativa es decreciente.
Esto se puede probar formalmente, y constituye el siguiente teorema.

***Teorema* 4.9**. Sea f continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).
a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$
b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración:
a) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en $[a, b]$ y $x_1 < x_2$. Entonces f será continua en $[x_1, x_2]$ y diferenciable en (x_1, x_2) y de acuerdo al teorema del valor medio, existe un número $c \in (x_1, x_2)$, tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Y como por hipótesis $f'(c) > 0$, y $x_2 - x_1 > 0$, entonces

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{o sea} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

lo que indica que f es creciente en $[a, b]$.
De manera análoga se demuestra b).

Ejemplo ilustrativo. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$$

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 = 0$$

La función derivada es una parábola que se abre hacia arriba y corta al eje-x en los puntos $x_1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \approx -1.55$ y $x_2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \approx 0.22$ por lo que

$$f'(x) > 0 \text{ para } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty) \quad \text{y}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x \in (x_1, x_2)$$

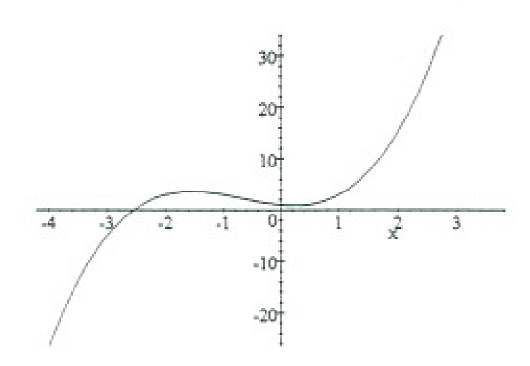
por lo que

f es creciente en $\left(-\infty, -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\,\right] \cong (-\infty, -1.55]$ y en $\left[-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}, \infty\right) \cong [0.22, \infty)$

y

$$f \text{ es decreciente en } \left[-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{3}\sqrt{7}, -\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}\sqrt{7}\right] \approxeq [-1.55, 0.22]$$

En la siguiente gráfica de la función se puede apreciar lo anteriormente dicho



Gráfica de $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$

***Teorema* 4.10.**

Criterio de la primer derivada. Sea c es un número crítico de una función continua f,

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

c) Si f' no cambia de signo en c (esto es, f' es positiva o negativa en ambos lados de c) f carece de extremo local en c.

Demostración:

a) Como el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c, esto implica que existen números a y b, tales que $f'(x) > 0$ en $a < x < c$ y $f'(x) < 0$ en $c < x < b$. Sea $x \in (a,b)$. Si $a < x < c$, entonces $f(x) < f(c)$, ya que en este intervalo $f'(x) > 0$, que significa f creciente en $[a,c]$. Si $c < x < b$, entonces
$f(c) > f(x)$, ya que $f' < 0$ significa f decreciente en en $[c,b]$; por consiguiente
$f(c) \geqslant f(x)$ para toda $x \in (a,b)$, y de acuerdo a la definición 17., f tiene un máximo local en c.

Las partes b) y c) se demuestran de manera análoga.

Ejemplo. Determina los extremos locales de

$$f(x) = x(1-x)^{\frac{2}{5}}$$

Solución: Determinemos los números críticos de f.

$$f'(x) = x\tfrac{2}{5}(1-x)^{-\frac{3}{5}}(-1) + (1-x)^{\frac{2}{5}}$$
$$= \frac{5(1-x)-2x}{5(1-x)^{\frac{3}{5}}} = \frac{5-7x}{5(1-x)^{\frac{3}{5}}}$$

$f'(x) = 0$ implica que $5 - 7x = 0$, es decir $x = \frac{5}{7}$. También existe un número crítico en $x = 1$, ya que aquí $f'(x)$ no existe. Entonces hay números críticos en $\frac{5}{7}$ y en 1.

En la siguiente tabla se indican los intervalos con extremos en los números críticos y los signos de la derivada en cada uno de los intervalos.

Intervalo	$5-7x$	$(1-x)^{\frac{3}{5}}$	$f'(x)$	f
$x < \frac{5}{7}$	+	+	+	creciente en $\left(-\infty, \frac{5}{7}\right]$
$\frac{5}{7} < x < 1$	−	+	−	decreciente en $\left[\frac{5}{7}, 1\right]$
$x > 1$	−	−	+	creciente en $[1, \infty)$

En la tabla podemos observar que la derivada cambia de signo en los puntos críticos.

a) En $\frac{5}{7}$, cambia de + a −, por lo que se tendrá un máximo local igual a $f(\frac{5}{7}) = \frac{5}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{2}{5}} \approx 0$ .43

b) En 1, cambia de − a +, teniendo por lo tanto un mínimo local igual a $f(1) = 0$.

Concavidad y puntos de inflexión.

Al trazar tangentes a una curva, digamos a una que sea creciente en $[a, b]$, puede suceder que las tangentes queden por debajo o por arriba de la cuerva, en el primer caso diremos que es una curva cóncava hacia arriba y en el segundo cóncava hacia abajo. Formalicemos esto en una definición.

***Definición* 20**. Si la gráfica de f está arriba de todas sus tangentes en un intervalo I, se dice que es *cócava hacia arriba* en I; si queda abajo de todas sus tangentes en I, se llama *cóncava hacia abajo* en I.

La segunda derivada de una función, esto es, la derivada de la primer derivada o derivada de la pendiente de la línea tangente, es útil para determinar los intervalos de concavidad de una curva, ya que, como debe advertirse, en una región cóncava hacia abajo, la pendiente, $f'(x)$, de las tangentes, al recorrer la curva de izquierda a derecha, disminuye, de manera que se trata de una función decreciente y por tal razón su derivada, esto es $f''(x)$, es negativa. Y en una región cóncava hacia arriba las pendientes crecen de manera que es una función creciente y por lo tanto $f''(x) > 0$. De ahí el siguiente:

Teorema*. 4.11. *Prueba de concavidad. Sea f una función con segunda derivada en un intervalo I.

b) Si $f''(x) > 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.

a) Si $f''(x) < 0$ para toda $x \in I$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

Demostración. a) Sea x_0 cualquier número en I. Debemos demostrar que la curva $y = f(x)$ está arriba de la tangente en $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de la tangente es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Así que debemos demostrar que

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{para toda } x \in I,\ x \neq a$$

Primero veamos el caso en que $x > x_0$. Al aplicar el teorema del valor medio a f en el

intervalo $[x_0, x]$
obtenemos un número c, con $x_0 < c < x$, tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \qquad (1)$$

como $f''(x) > 0$ en I, sabemos que f' es creciente en I y como $x_0 < c$, esto implica que

$$f'(x_0) < f'(c)$$

ahora, al multiplicar esta desigualdad en ambos miembros por el número positivo $x - x_0$, obtenemos

$$f'(x_0)(x - x_0) < f'(c)(x - x_0)$$

y sumando $f(x_0)$ en ambos miembros

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) < f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$

y según la ecuación (1), el segundo miembro es igual a $f(x)$, de modo que

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) < f(x)$$

$$o \quad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

que es lo que deseábamos demostrar.
Para el caso en que $x < x_0$, por argumentos similares, se tiene $f'(c) < f'(x_0)$, y al multiplicar por el número negativo $x - x_0$, se invierte la desigualdad obteniéndose

$$f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$$

y al sumar en ambos lados $f(x_0)$

$$f(x_0) + f'(c)(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$o \qquad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definición 21. Punto de inflexión.
Un punto P de una curva se llama *punto de inflexión*, si en dicho punto la curva cambia de concavidad,
o sea donde la segunda derivada cambia de signo.

Ejemplo. Determine el comportamiento de la curva $y = x^3 - 3x + 1$, respecto de sus intervalos de crecimiento, máximos y mínimos locales, concavidad y puntos de inflexión.

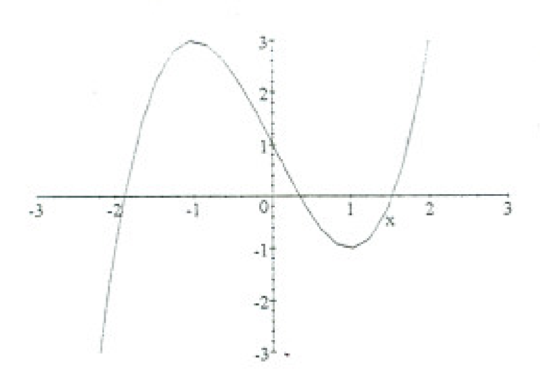
Solución:

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$
$$y'' = 6x$$

Como $y' = 0$ en $x = 1$, $x = -1$, estos serán números críticos.
Pongamos una tabla para analizar signos de las derivadas

Intervalo	y'	y''	y
$x < -1$	$+$		creciente en $(-\infty, -1]$
$-1 < x < 1$	$-$		decreciente en $[-1, 1]$
$x > 1$	$+$		creciente en $[1, \infty)$
$x < 0$		$-$	cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$
$x > 0$		$+$	cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$

En $x = -1$, y' cambia de $+$ a $-$, por lo que se tiene un máximo local $y(-1) = 3$.
En $x = 1$, y' cambia de $-$ a $+$, por lo que se tiene un mínimo local $y(1) = -1$.
En $x = 0$, y'' cambia de $-$ a $+$, por lo que se tiene un punto de inflexión en $y(0) = 1$.
Con esta información el bosquejo de la curva quedaría:



Gráfica de $y = x^3 - 3x + 1$

Notemos que en un máximo local la curva es cóncava hacia abajo y en un mínimo local es cóncava hacia arriba. En el siguiente teorema se formaliza este hecho.

Teorema 4.12. Criterio de la segunda derivada.

Sea f'' una función continua sobre un intervalo abierto que contenga a c.

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.

b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.

Demostración: a) Si $f''(c) > 0$, entonces $f''(x) > 0$ en algún intervalo abierto I que contnga a c, y por la prueba de concavidad, f es cóncava hacia arriba en I. Por lo tanto la gáfica de f se encuentra situada arriba de su tangente en $P(c,f(c))$. Pero como $f'(c) = 0$, la tangente en P es horizontal y esto demuestra que $f(x) \geq f(c)$ para $x \in I$, de manera que f tiene un mínimo local en c. La parte b) se demuestra de manera similar.

Nota: El criterio de la segunda derivada no indica nada cuando $f''(c) = 0$. En este punto podría haber un máximo, un mínimo o ninguno de los dos. Esta prueba también falla cuando no existe $f''(c)$. En estos casos hay que emplear el criterio de la primera derivada.

Ejemplo. Analice la curva $f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$, en cuanto concavidad, puntos de

inflexión y extremos locales.

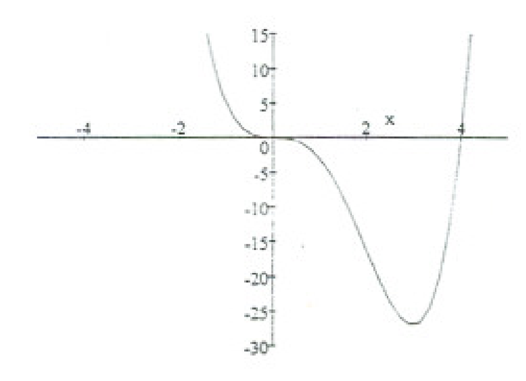
Solución:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

como $f'(x) = 0$ en $x = 0,\ x = 3,$ estos son los números críticos.
Con el criterio de la segunda derivada es inmediato que, como $f''(3) > 0,$ en $x = 3$ hay mínimo local igual a $f(3) = -27$. Y como $f''(0) = 0,$ entonces el criterio no nos dice nada
En la siguiente tabla se analizan los signos

Intervalo	f'	f''	f
$x < 0$	$-$	$+$	decreciente y cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0]$
$0 < x < 3$	$-$		decreciente en $[0,3]$
$x > 3$	$+$		creciente en $[3,\infty)$
$0 < x < 2$		$-$	cóncava hacia abajo en $(0,2)$
$x > 2$		$+$	cóncava hacia arriba en $(2,\infty)$
$x = 3$	0	$+$	mínimo local $= -27$ en $x = 3$
$x = 0$	0	0	Punto de inflexión en $(0,0)$, ya que f'' cambia de signo
$x = 2$		0	Punto de inflexión en $(2,-16)$ ya que f'' cambia de signo

En $x = 0$ falla el criterio de la segunda derivada, pero, con el primer criterio, vemos que f' no cambia de signo en 0, por lo que f no tiene extremo local en 0.
El bosquejo de la gráfica quedaría:



Aplicaciones a la economia.
Recordemos que si $C(x)$, la función costo, es el costo de producción de x unidades de cierto producto, entonces el costo marginal es la derivada de $C'(x)$. La función costo promedio, definida como

$$c(x) = \frac{C(x)}{x}$$

representa el costo unitario cuando se producen x unidades, geométricamente es la pendiente de la recta que une el origen con el punto $(x, C(x))$ de la función costo.

Veamos los puntos críticos de esta función costo promedio.

$$c'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = 0$$

cuando la derivada del costo promedio es cero se tiene que

$$xC'(x) = C(x)$$

$$ó \quad C'(x) = \frac{C(x)}{x} = c(x)$$

$$C'(x) = c(x)$$

En los números críticos que cumplen con esta relación normalmente hay valores mínimos. Por consiguiente,

Si el costo promedio es mínimo, entonces

costo marginal = costo promedio

Ahora veamos las ventas. Sea $p(x)$ el precio unitario que puede cobrar la empresa cuando vende x unidades. A la función p se le llama función de demanda, o función precio, y se espera que sea una función decreciente de x. Si se venden x unidades y el precio unitario es $p(x)$, entonces el ingreso total es

$$R(x) = xp(x)$$

a R se le denomina función ingreso. La derivada R', de la función ingreso se llama función ingreso marginal (en general, a la derivada de una función económica se le denomina con el nombre de marginal),

y es la tasa de cambio del ingreso con respecto a la cantidad de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, la utilidad, o ganancia, total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

donde P es llamada función utilidad, la función utilidad marginal es P'. A fin de mmaximizar la utilidad se localizan los puntos críticos de P, esto es, los números x donde la utilidad marginal es cero.

Al hacer esto se tiene

$$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$$

o bien

$$R'(x) = C'(x)$$

Por consiguiente:

Si la utilidad es máxima,

utilidad marginal = costo marginal

A fin de asegurar que esta condición da lugar a un máximo, al obtener la segunda derivada

$$P''(x) = R''(x) - C''(x)$$

pediremos que

$$P''(x) = R''(x) - C''(x) < 0$$

o bien que

$$R''(x) < C''(x)$$

"la tasa de aumento de la utilidad marginal es menor que la tasa de aumento del costo marginal".

De este modo tendremos que la utilidad será máxima cuando

$$R'(x) = C'(x) \qquad y \qquad R''(x) < C''(x)$$

Ejemplo 1. Una compañia estima que el costo de producción de x artículos en dólares es

$$C(x) = 2600 + 2x + 0.001x^2$$

a) Determine el costo, el costo promedio y el costo marginal para producir 1000, 2000 y 3000 artículos.

b) Calcule el nivel de producción para minimizar el costo promedio y determine este costo promedio mínimo.

Solución: Las funciones costo promedio y costo marginal son:

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2600}{x} + 2 + 0.001x$$

$$C'(x) = 2 + 0.002x$$

Con estas ecuaciones y la de costo se obtiene la siguiente tabla que da respuesta al primer inciso.

x	$C(x)$	$c(x)$	$C'(x)$
1000	5600.00	5.60	4.00
2000	10 600.00	5.30	6.00
3000	17 600.00	5.87	8.00

b) Para minimizar el costo promedio se debe cumplir

$$\text{costo marginal} = \text{costo promedio}$$

$$C'(x) = c(x)$$

$$2 + 0.002x = \frac{2600}{x} + 2 + 0.001x$$

al simplificar esta ecuación obtenemos

$$0.001x = \frac{2600}{x}$$

$$x^2 = \frac{2600}{0.001} = 2,600,000$$

$$x = \sqrt{2,600,000} \approx 1612$$

para checar que este nivel de producción es para un mínimo, apliquemos el criterio de la segunda derivada. Como

$$c''(x) = \frac{5200}{x^3} > 0$$

entonces la función costo promedio es cócava hacia arriba en todo su dominio y

efectivamente se trat de un mínimo.
El valor mínimo aproximado del costo promedio es

$$c(1612) = \frac{2600}{1612} + 2 + 0.001(1612)$$
$$c(1612) = \$5.22 \text{ por artículo}$$

Ejemplo 2. Determine el nivel de producción que maximice la ganancia en una empresa en donde las funciones de costo y demanda son estimadas como:

$$C(x) = 3800 + 5x - \frac{x^2}{1000}$$
$$p(x) = 50 - \frac{x}{100}$$

Solución: La funció ingreso será:

$$R(x) = xp(x) = 50x - \frac{x^2}{100}$$

la función ingreso marginal será:

$$R'(x) = 50 - \frac{x}{50}$$

y la función costo marginal es

$$C'(x) = 5 - \frac{x}{500}$$

Entonces en utilidad o ganancia máxima se tiene

$$R'(x) = C'(x)$$
$$50 - \frac{x}{50} = 5 - \frac{x}{500}$$

y resolviendo para x

$$x = 2500$$

Para comprobar que esto produce un máximo, determinemos las segundas derivadas

$$R''(x) = -\frac{1}{50}, \qquad C''(x) = -\frac{1}{500}$$

de modo que se cumple

$$R''(x) < C''(x) \qquad \text{para todos los valores de } x$$

En consecuencia las utilidades serán máximas para un nivel de producción de 2500 unidades.

4.9. Algunas aplicaciones de la derivada.

a) El polinomio de Taylor.

Cuando vimos la diferencial de una función nos dimos cuenta de que, para aproximar el valor de una función $f(x)$ en las proximidades de un punto de abcsisa x_0, podemos emplear la ordenada correspondiente de la ecuación de la línea tangente a la curva que pase por $(x_0, f(x_0))$, esto es, podemos emplear un polinomio de primer grado como aproximación de los valores de una función, en pequeñas vecindades de algún punto x_0. En general veremos que, si la función $f(x)$ tiene el número suficiente de derivadas, podemos emplear polinomios $P(x)$, llamados polinomios de Taylor, de mayor grado para

efectuar aproximaciones de la función en vecindades pequeñas alrededor de un punto x_0.

La técnica para encontrar los polinomios de aproximación consiste en lo siguiente: primero se selecciona un punto x_0 situado en el dominio de la función por aproximar y se impone la condición de que en dicho punto cincidan los valores de la función $f(x)$ y del polinomio $P(x)$ de aproximación, es decir

$P(x_0) = f(x_0)$. Las gráficas de f y P pasan por $(x_0, f(x_0))$

y entonces decimos que el polinomio de aproximación está desarrollado respecto del punto x_0, o que está centrado en dicho punto. Pero es evidente que habrá muchos polinomios que pasen por $(x_0, f(x_0))$ y, como nuestra tarea consiste en encontrar uno cuya gráfica no se aleje mucho de la gráfica de la función en las cercanias de este punto, una forma de lograrlo es imponer, ahora, la condición de que la pendiente del polinomio sea la misma que la de la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Es decir, de que

$P'(x_0) = f'(x_0)$. Las gráficas de f y P tienen la misma pendiente en $(x_0, f(x_0))$

con estas dos condiciones, se puede obtener la aproximación lineal dada por la ecuación de la tangente en $(x_0, f(x_0))$.

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

En efecto si $P(x) = a + b(x - x_0)$ es el polinomio que buscamos, entonces, imponiendo la primera condicion

$$P(x_0) = f(x_0)$$

se tiene

$$P(x_0) = a = f(x_0)$$

de manera que el polinomio qudaría

$$P(x) = f(x_0) + b(x - x_0)$$

y, ahora, con la segunda condición

$$P'(x_0) = f'(x_0)$$

se tiene

$$b = f'(x_0)$$

de modo que el polinomio buscado es

$$P(x) = a + b(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

que, como puede verse, es la ecuación de la línea tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Veamos la aproximación polinómica para la función concreta $y = f(x) = e^x$ con polinomios centrados en $x_0 = 0$.

Para un polinomio de primer grado se tendrá

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

esto es

$$P_1(x) = e^0 + e^0 x = 1 + x$$

que es la ecuación de la línea tangente a la curva $y = e^x$ en $(0,1)$.

Con esta aproximación, al alejarnos de $(0,1)$, la curva se empieza a separar de la línea tangente y la aproximación pierde calidad. Para mejorar la aproximación, podemos imponer otra condición: que coincidan las segundas derivadas de P y f en $x = 0$, (que tengan la misma concavidad). Con estos requisitos, se tiene un polinomio de aproximación de segundo grado de la forma

$$P_2(x) = a + bx + cx^2$$

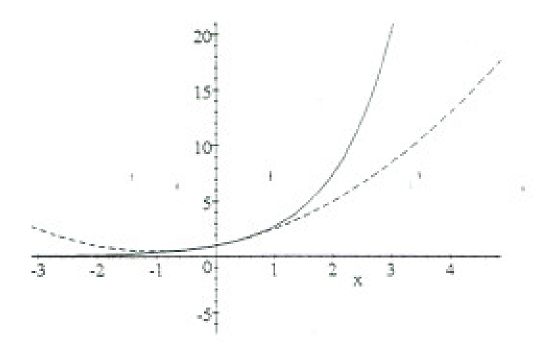
para el cual

$$P_2(0) = a = f(0) = e^0 = 1$$
$$P_2'(0) = b = f'(0) = e^0 = 1$$
$$P_2''(0) = 2c = f''(0) = e^0 = 1$$
$$c = \frac{f''(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

de manera que el polinomio es

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

En la siguiente figura se observa la aproximación de este polinomio de Taylor de segundo grado (gráfica punteada) con la función exponencial $y = e^x$, en las cercanias de $(1,0)$.



Gráficas de $y = e^x$, $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Si cotinuamos con este procedimiento y queremos emplear un polinomio de aproximación , centrado en $x_0 = 0$, de grado n,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

pediremos que se cumplan las condiciones:

$$P_n(0) = f(0)$$
$$P'(0) = f'(0)$$
$$P''(0) = f''(0)$$
$$\cdots$$
$$P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

con lo cual se obtiene que el polinomio en cuestión es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

llamado polinomio de aproximación de Taylor de grado n, centrado en $x_0 = 0$, para la función $f(x) = e^x$.

Procediendo de manera semejante para alguna otra función $f(x)$, que tenga un número suficiente de derivadas, su polinomio de aproximación de Taylor de grado n, centrado en $x = x_0$, es de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)x^n$$

sujeto a las condiciones

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0) \\ P'(x_0) &= f'(x_0) \\ P''(x_0) &= f''(x_0) \\ &\cdots \\ P^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

Las derivadas sucesivas del polinomio $P_n(x)$ son

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ P''(x) &= 2a_2 + (2)(3)a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \\ P'''(x) &= (2)(3)a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} \\ &\vdots \\ P^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)a_n \end{aligned}$$

y al hacer $x = x_0$ y emplear las condiciones (c) se tiene:

$$\begin{aligned} P(x_0) &= a_0 = f(x_0) \\ P'_n(x_0) &= a_1 = f'(x_0) \\ P''(x_0) &= 2a_2 = f''(x_0) \\ P'''(x_0) &= (2)(3)a_3 = 3!a_3 = f'''(x_0) \\ &\cdots \\ P^{(n)}(x_0) &= n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)a_n = n!a_n = f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f'(x_0) \\ a_2 &= \frac{f''(x_0)}{2} \\ a_3 &= \frac{f'''(x_0)}{3!} \\ &\cdots \\ a_n &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \end{aligned}$$

coeficientes todos de la forma

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots,n$$

y por lo tanto:

Definición 22.

El polinomio de aproximación de Taylor de grado n, para la función $f(x)$, centrado en $x = x_0$, es:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

notación que se puede compactar escribiendo

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Nota. Cuando $x_0 = 0$, el polinomio correspondiente

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

es llamado n –ésimo polinomio de Maclaurin para f.

Entre más grande sea n, mejor será la aproximación del polinomio de Taylor con la función f en las proximidades de x_0. Y si la diferencia o error entre $f(x)$ y su polinomio de aproximación $P(x)$, tiende a cero cuando $n \to \infty$, podemos escribir

$$f(x) = P_\infty(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

expresión que es llamada *serie de Taylor de* $f(x)$ en torno a $x = x_0$. (Si $x_0 = 0$ se le suele llamar *serie de Maclaurin*). Estas series, que a menudo son llamadas series de potencias, son generalmente convergentes para todos los valores de x comprendidos dentro de cierto intervalo llamado *intervalo de convergencia* y son divergentes para todos los valores que quedan fuera de dicho intervalo.

A continuación se dan algunos desarrollos en serie, de funciones conocidas, y su intervalo de convergencia.

Serie de potencias	Intervalo de convergencia
a) $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot4}x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3 - \cdots$	$-1 < x \leq 1$
b) $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3 + \cdots$	$-1 < x \leq 1$
c) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$	$-1 < x < 1$
d) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
e) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$-1 < x \leq 1$
f) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
g) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$

b) Regla de L'Hopital.

Al calcular límites de la forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

podemos tener, en ocasiones, el resultado

$$\frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

a los cuales llamaremos formas indeterminadas.

Cuando se trata de funciones racionales , las formas $\frac{0}{0}$, se pueden evitar simplificando el factor común que cause la indeterminación, lo cual se hace, por ejemplo, en el siguiente límite

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)} = \frac{3}{2}$$

En algunos otros límites indeterminados, la obtención del límite no es tan obvia, como sucede con los límites

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para este tipo de límites se puede emplear el teorema conocido como Regla de L'Hopital, que dice lo siguiente:

Teorema 4.13. Regla de L'Hopital.

Sean f y g dos funciones diferenciables con $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I, que contiene al punto a.

Sean

$$\lim_{x\to a}f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to a}g(x) = 0$$

o

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$$

3. Empleando la definición de la derivada, demuestre que $(\cos x)' = -\sin x$.

4. Empleando reglas de derivación, encuentre las derivada y' de las funciones:

a) $y = x - \frac{1}{x}$

b) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

c) $x^2 - y^2 = \sqrt{2}$

d) $y = \frac{1}{99}(1-x)^{-99} - \frac{1}{49}(1-x)^{-98} + \frac{1}{97}(1-x)^{-97}$ *sol.* $\frac{x^2}{(1-x)^{100}}$

e) $y = Ae^{-k^2x}\sin(\varpi x + \alpha)$.

f) $y = \arctan(\tan^2 x)$

g) $y = x - \ln\sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x}\operatorname{arccot}(e^x)$.

5. Verifique que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\right) = -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

7. Si $x^4 + y^4 = x^2y^2$, encuentre y'. ¿Qué opina de su resultado?

8. La Ley de Boyle establece que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, el producto de la presión por el volumen permanece constante: $PV = C$. Calcula la rapidez de cambio del volumen en función de la presión.

9. Una estrella variable cefeida es aquella cuyo brillo aumenta y disminuye de manera alternativa. La que se ve con mayor facilidad es Delta Cephei, para la cual el intervalo entre los brillos máximos es de 5.4 días. El brillo promedio de esa estrella es es 4 y cambia en ± 0.35. Con estos datos, el brillo de la estrella cuando el tiempo es t días, se modela mediante la función

$$B(t) = 4 + 0.35\sin\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

a) Determina la rapidez de cambio del brillo a los t días.

b) Calcula, con dos decimales de exactitud, la rapidez de aumento despues de un día.

10. Una bola de nieve esférica se funde de tal modo que su volumen se reduce a una velocidad de $1\ cm^3/\text{min}$. ¿Con qué velocidad disminuye el diámetro cuando es de 10 cm.

11. Se desea construir una caja sin tapa a partir de un cartón rectangular de largo L y ancho h, cortando en cada una de sus esquinas un pequeño cuadrado de lado x, y doblando después las orillas para formar la caja. Determine el valor que debe tener x, en

términos de L y h, para que el volumen de la caja sea el mayor posible.

12. Bosqueja la gráfica de una función que cumpla con todas y cada una de las siguientes condiciones:

$f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ si $|x| > 1$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$,
$f''(x) < 0$ si $x < 0$, $f''(x) > 0$ si $x > 0$.

13. Para la siguiente función de costo

$$C(x) = 45 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{560}$$

determine:

a) El nivel de producción que minimice el costo promedio, y

b) El costo promedio mínimo.

14. Para la función costo y demanda dados, determine el nivel de producción que maximice la utilidad.

$$C(x) = 1200 + 25x - 0.0001x^2, \qquad p(x) = 55 - \frac{x}{1000}$$

sol. 16,667

15. Linealice la función $f(x) = \sqrt{1+x}$, en las proximidades de $x_0 = 0$.

Sol. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

16. Demuestre que $1 - \frac{x}{2}$ es la linealización local de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ cerca de $x = 0$.

17. Use la linealización de e^x para evaluar el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{kh} - 1}{h}$$

18. Obtenga el polinomio de Taylor en $x_0 = 0$, para la función $f(x) = e^{-x^2}$.